CATOPTRICÆ ET DIOPTRICÆ SPHÆRICÆ ELEMENTA.

37. 10. 43

Auctore *DAVIDE GREGORIO*, M. D.
Astronomiæ Professore *Saviliano* Oxoniæ,
& Societatis Regiæ Socio.

OXONII,
E THEATRO SHELDONIANO,
An. Dom. MDCXCV.

Imprimatur,

HENR. ALDRICH

Vice-Can. *OXON.*

Apr. 18. 1695.

2165 : 11

PRÆFATIO.

Elementa hæc Catoptricæ & Dioptricæ, ante annos undecim in Academia Edinburgena *publicè Prælecta, in uſum Juventutis Academicæ ita adornavi, ut ad ipſa intelligenda Geometriâ Euclideâ tantùm opus eſſet. Quamvis enim altiùs petitam cauſſam monſtraverim quâ fit ut Sphæræ Conoideſque eaſdem vires ſortiantur in Luce reflectenda atque etiam refringenda; quæ huc ſpectant tutò omittere poterunt ii qui circa proprietates ſuperficierum Planarum & Sphæricarum tantùm ſolliciti ſunt: Has præcipuè hic tractavimus, & ex illarum combinatione ortas Machinas, quarum ſcil. effectus à ſimplice lente*

aut ſpeculo, vel pluribus conjugatis pendent. Aſſumpta quædam adhibui, qualia olim Keplerus, *à rigore Geometrico paulùm abludentia, quæ tamen in ſolvendis Quæſtionibus Phyſicis, aliàs intricatiſſimis, compendia ſubminiſtrant. Si Elementa hæc curvis in Opticis minùs verſato lucem adferant, noſtrum inſtitutum conſequemur.*

CATOPTRICÆ

CATOPTRICÆ
ET
DIOPTRICÆ SPHÆRICÆ
ELEMENTA.

QUÆ à Phyſicis agitari ſolent quæſtiones, de natura Lucidi & Lucis, Mathematicorum exemplo, omittimus. Si enim qui hanc Scientiam per inventa ſua excoluerunt, in eruenda objecti illius abſoluta natura, cauſſiſque Phænomenon intimis inveſtigandis deſudaſſent, non contenti, ex obſervatis ſimplicioribus Lucis proprietatibus, alias methodo Geometricâ deducere, Opticam ad illam, in quam excrevit, magnitudinem nunquam perduxiſſent. Igitur, ſive Lux ſit lucentis actio, proxima ſibi corpora impellentis, quæ alia rurſus ſimiliter impellant, & ita denuo, horum interim nullo per ſpatium notabile delato; ſive, quod magis arridet, ex corpuſculis conſtet è lucido corpore per circumambientia ſpatia velociſſime projectis; ſive prorſus

diverſa ſit ejus natura olim vel nunquam plene detegenda, hanc certe ejus proprietatem, & ſimplicem ſatis, & experientia confirmatam, aſſumere licet: quod à quovis puncto lucido, radii undique in orbem propagentur, in medio homogeneo per rectas lineas (quippe *breviſſimas*) eodem tenore ſe diffundentes.

Quod ſi medium occurrat aliter affectum, cujus partes lucem vel repercutiunt, vel magis diffundunt, vel minus, quam prioris medii partes, eveniet radiorum *inflectio*, quo generali nomine, tam reflectionem quam refractionem, cum Auctoribus, complector. Etenim lux impingens in ſuperficiem prorſus negantem ſibi tranſitum, diffuſionis autem gradum priorem non immutantem, aliò tota quo facillime poterit, eodemque quo prius modo ſe diffundens reſiliet; id quod lucis *Reflectio* dicitur: & quæ de hujus legibus agit Scientia pro vario Radiorum ad corpora diverſimode figurata appulſu, *Catoptrica*. Si vero Medium in quod Lux impingit, radiis quidem tranſitum concedat, ſed talem, ut magis aut minus diffundatur quam antea, lucis radius quilibet à recta, quam prius affectabat, via inflectetur, atque hæc Inflectio, *Refractio*; quæque hujus effectus & leges docet Scientia, *Dioptrica* appellatur.

Defi-

Definitiones.

Radians eſt, à cujus ſingulis punctis radii diffunduntur.

Radii paralleli ſunt, qui æqualiter à ſe invicem diſtant.

Radii divergentes ſunt, qui utrinque producti concurrunt ad partes motui contrarias.

Radii convergentes ſunt, qui utrinque producti concurrunt ad partes motûs, ſive verſus quas tendunt.

Notandum paralleliſmum, divergentiam, & convergentiam intelligi de ejuſdem puncti radiis.

Focus, eſt punctum ubi ejuſdem puncti radii producti concurrunt. Unde radiorum parallelorum focus infinite diſtans intelligitur.

Angulus Incidentiæ ille eſt, qui comprehenditur ſub radio incidente, & recta ſuperficiei inflectenti ad incidentiæ punctum normali.

Angulus Reflexus, qui ſub radio reflexo, & prædicta normali comprehenditur.

Angulus Refractus verò, qui comprehenditur ſub radio refracto & normali producta.

Duo ſequentia effata pro Axiomatibus habemus, cum & Rationibus Geometricis, & experientiæ congruant.

Axiomata.

1. Lucis radius in Superficiem inflectentem perpendiculariter incidens, aut rectà progreditur, aut in ſeipſum reflectitur. Cum enim radii directio ſit ad ſuperficiem inflectentem, omnium quæ à radiante puncto duci poſſunt, vel *minima*, ſi ſuperficies inflectens ſit plana, vel abſente hac conditione, forſan *maxima*, & utroque caſu, ſui generis *unica* & determinata; in hac eadem directione, vel progrediendo vel regrediendo, perſiſtet radius. Etenim innumeræ ſunt rectæ, ad *unicam* hanc in quovis dato angulo inclinatæ, quarum proinde nulla, radii directionem potiori jure ſibi vendicare poteſt.

2. Si per radium incidentem, & rectam ſuperficiei inflectenti ad punctum incidentiæ normaliter inſiſtentem, productum intelligatur planum; radius inflexus etiam in producto plano invenitur: vel, quod eodem redit, omnis radii inflectio peragitur in ſuperficie ad inflectentem ſuperficiem perpendiculari. Atque ſuperficies hæc, *Planum Inflectionis*, ad exemplum *Alhazeni*, dicetur. Nam cum illa ſit, omnium quæ ad inflectentem ſuperficiem per punctum radians duci poſſunt, *minima* vel *maxima*, & proinde *unica*, conſtat propoſitum eodem modo quo præcedens: immo advertenti patebit, præcedens eſſe hujus caſum tantum particularem.

CATOPTRI-

CATOPTRICÆ ELEMENTA.

Prop. I. Theor. I.

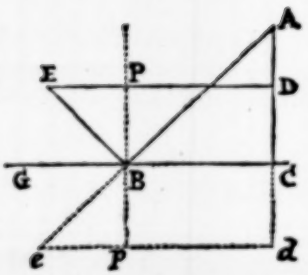
SI lucis radius à ſuperficie plana reflectatur, angulus reflexus æqualis erit angulo incidentiæ.

Quamvis hujus Theorematis demonſtratio ad Phyſicam proprie pertineat, ac Mathematico ſufficiat illud experientiâ comprobatum aſſumere: conſuetudini tamen morem gerentes illius demonſtrationem pertexemus, à nulla Phyſicorum hæreſi pendentem.

Deſignet AB radium à puncto radiante A prodeuntem, & in ſuperficiem planam reflectentem GC incidentem ad B. Dico hujus reflexum BE eſſe talem, ut angulus reflexus PBE (poſita BP ad GC normali) ſit angulo incidentiæ PBA æqualis.

Ex radiante puncto A ad ſuperficiem GC demittatur perpendicularis AC. Radii omnes inter AB & AC comprehenſi, quique rectam BC (communem ſectionem plani inflectionis cum plano reflectente) in reflectente plano occupant, ſi medium GC*de* pervadi poſſet, eſſetque priori EBCD homogeneum, eodem tenore diffunderentur, quo prius: hoc eſt,

ad



ad diſtantiam BE poſt GC, diffunderentur in *de*, poſitis ABE, ACd lineis rectis. Cumque, ex hypotheſi, ſuperficies plana reflectens BC nec augeat, nec minuat diffuſionem radiorum, (ſin ſecus, cujus tamen nulla eſt adhuc ab experimentis ſuſpicio, liquet futurum eſſe, ut angulus reflexus æque ac refractus, ob eaſdem rationes, angulo incidentiæ inæqualis evadat: ad quorum radiorum debitam inflectionem, Conoides idoneos excogitavit *Carteſius lib. 2. Geom.*) ſed illos tantum repercutiat in idem medium in quo prius verſabantur, hoc eſt, in medium ubi radii eodem modo ſparguntur aut diffunduntur; patet, poſt reflectionem à ſuperficie GC, Radios eodem modo diſperſum iri, quo diſperſi fuiſſent ſi in ſuperficiem CG non impegiſſent, verùm illâ amotâ in eodem medio permanſiſſent. Sed in iſto caſu, auctâ diſtantiâ exceſſu BE, radii diſperſi fuiſſent per ſpatium *ed*. Quare patet illos in diſtantia BE, æquali diſtantiæ Be, diſperſum iri in rectam DE rectæ *de* æqualem. Sed AC radius reflectitur in ſeipſum, quare DE eſt æqualis *de*, & figura BCDE per omnia ſimilis

&

& æqualis eſt figuræ BC *de*: immo ipſiſſima illa eſt reflexa, ſeu ſuper manentem rectam BC dimidiâ revolutione converſa. Quare ſi ab æqualibus angulis EBC, *e* BC, auferantur recti PBC, *p* BC, manebunt anguli EBP, *e Bp* æquales. Sed ABP æqualis *e Bp*, unde angulus Incidentiæ PBA æqualis eſt angulo reflexo PBE. q. e. d.

Scholium.

In Conſtituenda hac reflectionis lege, qua anguli ABP, EBP ponuntur æquales, *Maximi* & *Minimi* plurima habetur ratio. Quippe aggregatum rectarum AB, BE *minimum* eſt, hoc eſt minus aggregato aliarum quarumvis, ab iiſdem punctis A & E, ad aliud quodvis plani GC punctum ductarum: & viciſſim. Oportet enim iter radii (à plano GC reflexi) ab A ad E eſſe breviſſimum. Quippe *Naturæ Methodus operandi facillima eſt, & expeditiſſima.*

In reflectione verò ad ſuperficiem curvam, prædictum radiorum aggregatum (vel forſan horum intervallum) quandoque *maximum* eſt. Norunt enim Geometræ quàm affine fit Maximum minimo, & intervallum aggregato, & quàm facilè hoc in illud tranſeat.

Corol. 1.

Hinc anguli EBG, ABC (qui & ipſi quandoque Incidentiæ, & Reflectionis vocantur) etiam ſunt æquales; cum prioribus enim rectos angulos complent.

Corol.

Corol. 2.

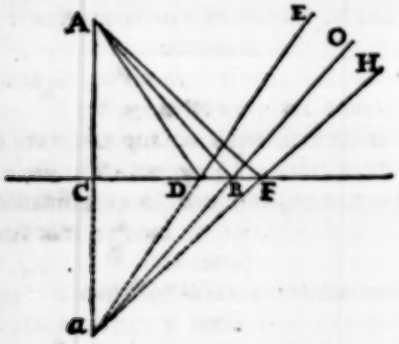
Si Radii Incidentis reflexus pro Incidente habeatur, Incidens viciſſim fiet reflexus.

Corol. 3.

Si anguli PBE, PBA, vel anguli GBE, CBA fuerint æquales, erit BE reflexus radii AB.

Prop. II. Probl. I.

EX dato foco radiorum in ſpeculum planum incidentium, eorundem radiorum, poſt reflectionem à ſpeculi ſuperficie, focum invenire.



A dato foco A, ad ſpeculum planum CF ducatur perpendicularis recta AC, quæ producatur in *a*, ut C*a* æqualis ſit CA. Erit *a* focus quæ-

quæſitus. Incidat quilibet radius AD, jungatur *a*D & producatur.

Quoniam in triangulis ACD, *a*CD latera AC, *a*C ſunt æqualia, & anguli ACD, *a*CD etiam æquales, quia recti; & latus CD utrique commune, erit angulus ADC æqualis *a*DC: ſed *a*DC æqualis EDF; ergo ADC, EDF æquantur. Unde DE, per *Corol.* 3. *Prop. I.* eſt radii AD reflexus à ſpeculo plano CF. Idem de quolibet alio radio à puncto F procedente, & in ſpeculum incidente, ſimiliter oſtendetur. Quare conſtat radios ab A divergentes, poſt reflectionem à ſpeculo plano CF, à puncto *a* divergere: hoc eſt, radiorum quorum focus ante reflectionem erat A, poſt reflectionem ad ſpeculum CF, focum eſſe *a*. q. e. d.

Scholium.

Cum oculus ubivis, ut ad O poſitus, radios excipiat ita procedentes, ac ſi revera à puncto *a* emanâſſent; palam eſt illius *imaginem* illic apparere: Quoniam radii ab *a* puncto divergentes, oculum in O ſimiliter afficiunt, ac ſi illud eſſet radians primarium.

Corol. 1.

Ex hac Prop. & *Corol.* 2. *Prop. I.* ſequitur radios ED, OB ad focum *a* convergentes, poſt reflectionem à ſpeculo CF, ad focum A convergere: & eum poſſe aſſignari ſitum plani CF, qui faciat OBA angulum æqualem angulo dato; nempe ſumendo OBF æqualem

dimidio Complementi dati anguli ad duos rectos.

Corol. 2.

In ſpeculis planis, imago cujuſvis puncti radiantis eſt in concurſu *a* radii reflexi OB, per oculi centrum o tranſeuntis, cum perpendiculari AC à puncto radiante in ſpeculum demiſſa. Unde, tectis utcunque vel ablatis reliquis ſpeculi partibus præterquam ad B, videbitur nihilominus radiantis Imago: illâ vero occultatâ, reliquis licet apertis, minime videbitur.

Corol. 3.

Viſibilium ad ſpeculi planum inclinatorum imagines, ad ſpeculi planum eodem modo inclinantur quo ipſa viſibilia: & proinde in ſpeculis planis horizontalibus, viſibilia verticalia everſa apparent.

Hæc & ſequentia facile intelliguntur, ſi viſibile ex pluribus punctis radiantibus conſtare concipiatur; & ad cujuſque imaginem attendatur: Nam ex his omnibus componitur viſibilis imago.

Corol. 4.

Planum radians & ejus imago à ſpeculo plano facta, ſunt figuræ æquales & ſimiles, ſed non ſimiliter poſitæ. Differunt utique ut manus dextera à ſiniſtra, ſive ut figura æri inciſa, ab ejus charactere chartæ impreſſo. Nam congruent ſi ad ſe invicem accedant.

Corol.

Corol. 5.

Quoniam recta *a* B æqualis A B, erit *a* O æqualis A B & B O ſimul, hoc eſt, diſtantia imaginis ab oculo æqualis radio incidenti, & radio reflexo ſimul ſumptis.

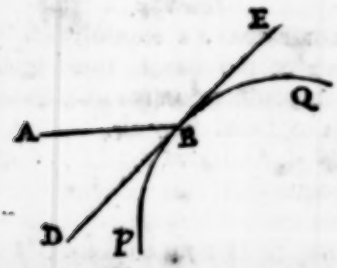
Corol. 6.

Quæcunque dicta ſunt de imagine cujuſvis viſibilis ſeu radiantis primarii, eadem & vera ſunt de imagine alterius imaginis. Unde oritur illa imaginum multiplicatio, per duo vel plura ſpecula plana rite diſpoſita; in quibus illud præcipuum eſt, quod cujuſvis imaginis diſtantia ab oculo, æqualis eſt radio à radiante primario ad oculum, mediantibus omnibus reflectionibus, propagato.

Lemma.

RAdius lucis eodem modo inflectitur à ſuperficie quavis curva, quo à ſuperficie plana tangente curvam in puncto incidentiæ.

Deſignet P Q ſuperficiem utcunque curvam, (etenim hic ſicut ſemper in ſequentibus, communes ſectiones ſuperficiei inflectentis, & plani hanc tangentis, cum plano inflectionis, ipſius ſuperficiei inflectentis & plani tangentis loco uſurpantur; quoniam omnis inflectio in plano inflectionis peragitur, ut



Axiomate 2. oſtenſum eſt: & ob eandem rationem, loco figuræ ſolidæ, planam uſurpamus, in plano inflectionis deſcriptam; ſic enim vocibus parcitur.) in quam radius AB incidat ad B. Cumque hic ſit craſſitiei admodum exiguæ, ſuperficiei curvæ particula B in quam incidit, erit etiam exigua. Superficiei vero curvæ inclinatio ſive directio ad B, eadem eſt cum inclinatione plani DE, hanc ibidem tangentis. Quare & quæ directionem ſequitur inflectio eadem eſt, ſive facta concipiatur à ſuperficiei curvæ PBQ, ſive planæ DBE particula B: Quippe, ad inflectionem radii AB quod ſpectat, perinde eſt quomodo reliqua ſuperficies incurvetur, modo particulæ exiguæ B, in quam ille incidit, inclinatio eadem maneat.

Facile foret idem veterum more oſtendere, exinde quod angulus Contactûs DBP vel EBQ ſit rectilineo quovis minor; & quod inveniri poſſit planum, ad planum DBE ita inclinatum,

tum, ut inflectionum ad illa factarum intervallum ſit data quavis inflectione minus. Nam ex hiſce evidenter ſequitur, radii AB inflectionem, ad ſuperficiei curvæ particulam B factam, non eſſe diverſam ab illa quæ fieret ad particulam B plani DBE, curvam ſuperficiem in B tangentis.

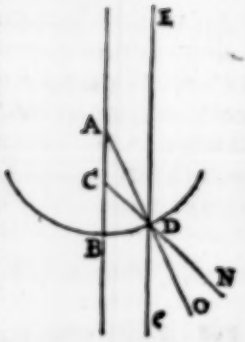
Prop. III. Probl. II.

RAdiorum parallelorum in ſpeculum Sphæricum datum incidentium, focum (ſive, puncti radiantis longinqui imaginem) invenire, reſpectu oculi in ſpeculi axe, radiis incidentibus parallelo, conſtituti.

Per ſpeculi centrum A ducatur recta AB incidentibus radiis parallela, ſpeculo occurrens in B. Biſecetur AB in C. Dico C eſſe focum quæſitum.

In hac & ubique in ſequentibus, punctum D puncto B admodum propinquum ſupponimus. Iſtud enim requiritur, ut incidentis ED reflexus, oculum, ex hypotheſi, in AB vel hac producta, poſitum afficiat: Nam, remotiùs à puncto B incidentium reflexi, poſt divergentiam à foco ſuo, oculi pupillam præterlabuntur; ac proinde ad viſionem imaginis nihil faciunt.

Porro,



Porro, Radiorum oculi pupillam ſubeuntium, qui rectius ſive propius ad pupillæ medium, eum ingrediuntur; hoc eſt, qui à punctis reflectuntur puncto B propioribus, ad viſionem imaginis plus faciunt, quam qui prope pupillæ extrema oculum ſubintrant: Nempe directiores & confertiores plus ad ſenſum movendum, quam obliquiores & rariores. Quare proxime ad verticem B incidentium ratio tantum habenda eſt. Quod etiam in ſequentibus omnibus locum habet.

Incidat jam è radiis parallelis quilibet ED. Ducantur AD, CD, & producantur. Quoniam D punctum ferè coincidit cum B, erit CD ferè æqualis CB: ſed ex conſtructione CA æqualis CB; ergo CA, CD æquantur; ergo etiam anguli CAD, CDA. Sed angulus CAD æqualis EDA qui eſt angulus incidentiæ radii ED; nam recta AD eſt ad ſuperficiem Sphæræ normalis. Unde angulus CDA angulo incidentiæ radii ED æqualis eſt. Ergo, per *Corol.* 3. *Theor. I.* DC eſt incidentis ED reflexus. Præterea ob æquales ad verticem angulos EDA, eDO, & CDA, NDO, radii eD ad BA paralleli in convexam ſuperficiem incidentis, reflexus DN retro productus ad C pertingit. Quod-

Quodque de quolibet radio ED ad libitum ſumpto demonſtratur, de omnibus, in ſimilibus conditionibus, verum eſt. Quare radii ad AB paralleli, quorum reflexi ad viſum conducunt, ſi in concavam Sphæram incidant, poſt reflectionem ad C congregantur: indeque rurſus divergentes, oculo in axe poſito, imaginem ibi videndam præbent. Immo ipſius axis reflexus à puncto C medio inter B & A quaſi divergit: quippe idem illi competit quod alteri cuivis à BD reflexo qui rectam AB decuſſat ad punctum à centro A, & incidentiæ puncto æqualiter remotum. In convexam vero incidentium reflexi à C divergunt; & imaginem, oculo in AB producta, poſito, ad punctum C (vel, quod eodem redit, ad punctum, intervallo minore quolibet dato, à puncto C diſtans) conſpiciendam efformant. q. e. d.

Corol.

Hinc, & ex *Corol.* 2. *Theor. I.* ſequitur, radiorum à puncto C divergentium reflexos à cava ſuperficie, vel ad C convergentium reflexos à convexa, eſſe parallelos rectæ AB, Sphæræ centrum, & punctum C conjungenti.

Scholium.

Si vertice B, axe BG, & parametro rectam FB æquante, deſcribatur parabola; erit hæc omnium circa datum circulum FB circumſcriptibilium

ſcriptibilium *minima*: ſive circulus FB erit omnium iſti Parabolæ inſcriptibilium *maximus*, per *Corol.* 1. *Prop. XX. lib.* 1. *Vincentii Viviani de Maximis & Minimis.* Atque circulus hic, & Parabola, ad punctum B,

eandem habent Curvaturæ rationem, (ut Kepleri verbis utar, *Cap. VIII. Prop. XX. Paralipom. in Vitellionem*) ibique quàm intime uniuntur. Quemadmodum enim contactus linearum duabus interſectionibus æquipollet, & revera à duabus interſectionibus infinitè vicinis haud differt, ut Geometris notum, & eo nomine, quæ ſe mutuo contingunt ſuperficies, in inflectendis radiis ad contactum incidentibus, aliiſque effectibus Phyſicis producendis eadem præſtent, ut *Lem.* ſuperiore oſtenſum eſt: ita hæc penitior unio, quæque quatuor interſectionibus æquivalet; proindeque intima quæ inter circulum, & ſectionem conicam (ſicut contactus intima eſt omnium inter hanc & rectam) intercedere poterit; hæc, inquam, æquipollentiam in effectibus Phyſicis, qui pendent à ſuperficiebus ex illarum rotatione genitis, ulteriorem producit. Nam ſicut radii ad GB paralleli, à concava Conoide parabolica

BD,

BD, exacte reflectuntur in *umbilicum* C, quarta parte parametri parabolæ generantis à vertice B diſtantem; ita radii iidem à concava Sphæra reflexi, in eodem puncto quam proxime congregantur: eademque ſpeculatio in aliis pluribus Phyſicis locum habet.

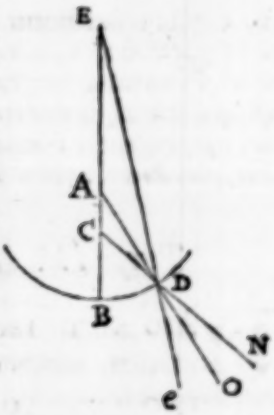
Prop. IV. Probl. III.

DAto foco radiorum divergentium, cujus diſtantia à ſpeculo Sphærico concavo dato, quadrante diametri ſpeculi major eſt, eorundem radiorum focum, poſt reflectionem à ſpeculo prædicto invenire, reſpectu oculi in axe verſantis.

Per Sphæræ centrum A, & datum focum E ducatur recta ſuperficiei Sphæricæ occurrens in *vertice* B; hanc *axem radiationis* appello, & oculum alicubi in illo ſitum ſuppono. In hac recta capiatur punctum C tale, ut BC ſit ad CA ſicut BE ad EA. Dico C eſſe focum quæſitum.

Incidat quilibet radius ab E procedens, in cavam Sphæræ ſuperficiem ad punctum D, vertici B ſatis propinquum (nam de alibi incidentibus non loquimur, cum illorum re-

flexi oculum, in EB positum, non afficiant, ut prius ostensum) in quo casu erit ZD fere æqualis EB, potestque illa pro hac in Physicis usurpari. Ducantur AD, CD. Similiter CD æqualis CB: unde ex constructione erit CD ad CA ut DE ad EA. Ergo vicissim CD ad DE ut CA ad EA. Quare per 3. Elem. VI. anguli ADE, ADC æquantur; sed ADE est radii ED angulus incidentiæ, ergo DC est (per *Corol.* 3. *Theor. I.*) incidentis ED, à speculo cavo, reflexus. Cumque radius ED sumptus sit ad libitum, patet radiorum omnium ab E divergentium, post reflectionem, focum esse C, respectu oculi in axe EB positi. q. e. d.



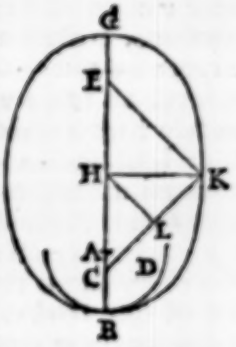
Corol.

Hinc radiorum *e*D, ad E focum datum in prædictis conditionibus, convergentium, & à speculo Sphærico convexo dato reflexorum, dabitur focus C.

Scholium.

Radii ex E divergentes, à concava Sphæra BD ideo reflectuntur convergentes ad C; quoniam circulus BD centro A descriptus (cujus rotatione

tatione generatur Sphæra) eandem habet curvitatis rationem cum ellipſi, umbilicis quibuſvis C & E (ut in *Prop. præced.* inventis) per B deſcripta, & generante Sphæroidem oblongam quæ, ut vulgo notum, radios ab altero umbilicorum divergentes reflectit, à ſuperficie cava, in alterum convergentes.



Ducatur ſemiaxis minor HK; jungantur rectæ CK, EK, quarum ſingulæ ſunt ſemiaxi BH æquales. Ex centro H in CK demittatur normalis HL.

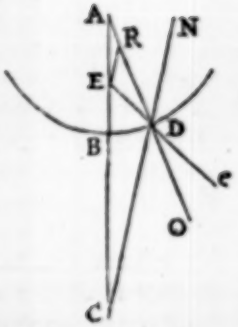
Patet LK eſſe dimidium lateris recti ad axem BG pertinentis, quia eſt tertia proportionalis rectis CK, HK. (Quod etiam verum eſt, ſi ex H puncto interſectionis axis majoris cum recta KH biſecante angulum comprehenſum à rectis ex umbilicis ad quodlibet Curvæ punctum inclinatis, demittatur ad alterutram prædictarum rectarum normalis.) Adeoque CL eſt ſemiſſis intervalli, axis majoris ejuſque lateris recti: eſtque etiam tertia proportionalis rectis KC, CH; ſcil. ſemiaxi majori, & ſemidiſtantiæ umbilicorum. Rurſus (ex conſtructione in *Prop. præced.*) BC eſt

ad CA ut BE ad EA; unde permutando & invertendo, erit BE ad BC (EG) ut AE ad AC. Ergo, BE + EG. BE — BC :: AE + AC. AE — AC, hoc eſt, BG ad CE ut CE ad AE — AC. Et ſumendo harum ſemiſſes, BH ad HC ut HC ad HA: hoc eſt, HA eſt tertia proportionalis ſemi-axi majori, & ſemi-diſtantiæ umbilicorum: unde & ſemiſſi intervalli axis majoris ejuſque lateris recti æqualis eſt. Quare AB eſt dimidium lateris recti. Et proinde circulus BD eſt (per *Corol.* 1. *Prop.* XX. *lib.* 1. *Vinc. Viviani*) maximus omnium ellipſin BG interius ad B tangentium. Quare (ut in *Scholio Prop. præced.* oſtenſum) eandem habet curvitatem cum prædicta ellipſi in B. Unde fit, quod Sphæra inde genita, eadem in reflectendo præſtat quam proxime, quæ Sphærois genita ab ellipſi exacte.

Prop. V. Probl. IV.

DAto foco radiorum divergentium, cujus diſtantia à cavo ſpeculo Sphærico dato, quadrante diametri ſpeculi minor eſt, eorum focum poſt reflectionem à prædicto ſpeculo invenire, reſpectu oculi in axe.

Per



Per Sphæræ centrum A, & datum focum E ducatur recta, ſuperficiei Sphæricæ occurrens in B. In hac capiatur punctum C tale, ut ſit BC ad CA ſicut BE ad EA. Dico C eſſe focum quæſitum.

Incidat quilibet radius ED. Ducantur AD, CD & producantur, ducatur item recta ER rectæ CD parallela.

Cum arcus BD ſit admodum parvus, erunt ED, EB item CD, CB æquales. Quare eſt ED ad EA ut CD ad CA, hoc eſt (ob DC, ER parallelas) ut ER ad EA; ergo rectæ ER, ED & proinde anguli ERD, EDR æquales ſunt. Sed EDR eſt radii ED angulus incidentiæ, & ERD eſt alterno NDA æqualis, quapropter (per *Corol.* 3. *Theor. I.*) DN eſt incidentis ED reflexus. Cumque ED ſit ad libitum aſſumptus, patet radiorum ab E procedentium reflexos à cava ſuperficie Sphærica, retro productos in C concurrere, ſive illorum focum eſſe C. q. e. d.

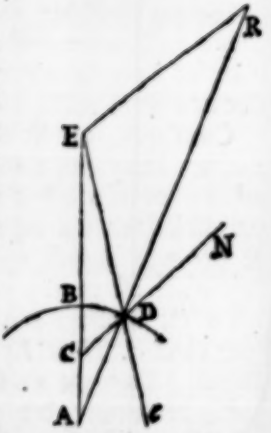
Corol.

Hinc, & ex *Corol.* 2. *Theor. I.* radiorum ND ad datum focum C convergentium, à ſpeculo Sphærico concavo dato BD reflexorum, inveniętur focus E.

Prop.

Prop. VI. Probl. V.

DAto foco radiorum divergentium, eorum focum poſt reflectionem à ſpeculo Sphærico convexo dato invenire, reſpectu oculi in axe.



Per Sphæræ centrum A, & focum datum E, ducatur recta ſuperficiei Sphæricæ occurrens in B: in illa capiatur punctum C, ut AC ſit ad CB ſicut AE ad EB. Dico C eſſe focum quæſitum.

Incidat quilibet radius ED ab E procedens. Ducatur CD & producatur. Huic per E ducta parallela ER, rectæ AD productæ occurrat in R. Evaneſcente arcu BD, ob rationes ſupra expoſitas, erit CD æqualis CB, & ED ipſi EB: & propterea AC ad CD ſicut AE ad ED. Sed ob æquiangula triangula ACD, AER, AC eſt ad CD ut AE ad ER. Ergo AE eſt ad ED ſicut AE ad ER. Quare ER æqualis ED.

ED. Ergo angulus ERD, ſive huic æqualis NDR æqualis eſt angulo EDR, nempe angulo incidentiæ radii ED. Unde ſequitur DN eſſe incidentis ED reflexum. Cumque ED ſit ſumptus utcunque, patet radios omnes ab E foco divergentes & oculum poſitione datum ſubeuntes, poſt reflectionem à ſuperficie Sphærica convexa BD, à foco C divergere. q. e. d.

Corol.

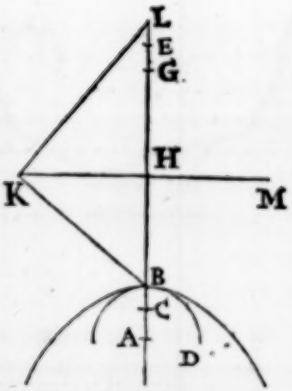
Hinc radiorum ND convergentium ad focum datum C diſtantem à ſpeculo, minus quadrante diametri, invenietur focus E ad quem convergunt reflexi à ſpeculo convexo dato.

Scholium.

Haſce duas ultimas propoſitiones, eorumque Corollaria, iiſdem verbis, in diverſis figuris enunciâſſe & demonſtrâſſe facile foret, verum minus exercitatis confuſionem pareret: unicum tamen Scholium utrique inſerviet, ad oſtendendum eandem eſſe curvitatis rationem in circulo BD, quæ eſt in Hyperbola, umbilicis C & E, per punctum B deſcripta, cujus curvæ rotatione circa axem, fit Conoidis Hyperbolicæ ſuperficies, propoſitam reflectionem exacte perficiens.

Ducatur diameter ſecunda KM. Junctæ rectæ BK erigatur normalis KL, axi GB occurrens in L, eritque HL tertia proportionalis rectis BH & HK; ac proinde æqualis ſemiſſi lateris recti ad axem BG pertinentis. Et cum

ex



ex natura umbilicorum, rectangulum GCB æquale ſit quadrato rectæ KH, addendo utrinque quadratum à BH deſcriptum, erunt quadrata rectarum BK & HC æqualia. Quare & rectæ BK, HC æquales ſunt. Et propter triangulum rectangulum BKL, BL ſive ſumma ſemi-axeos tranſverſi & ſemi-lateris recti eſt tertia proportionalis rectis HB, BK; ſive rectis HB, HC: hoc eſt ſemi-axi tranſverſo, & ſemi-diſtantiæ umbilicorum. Rurſus (ex conſtructione in *duabus Prop. præced.*) BC eſt ad CA ut BE ad EA. Quare BE eſt ad EG ut AE ad AC. Ergo BE — EG. BE + EG :: AE — AC . AE + AC, hoc eſt, BG ad CE ut CE ad AE + AC. Et ſumendo harum ſemiſſes, BH eſt ad CH ut CH ad HA: hoc eſt, HA eſt tertia proportionalis ſemi-axi tranſverſo, & ſemi-diſtantiæ umbilicorum. Igitur HA æqualis eſt BL, ſive ſummæ ſemi-axeos tranſverſi & ſemi-lateris recti. Quare AB eſt dimidium lateris recti, & proinde circulus BD eſt (*per Corol. 1. Prop. XX. lib. 1. Vinc. Viviani*) maximus omnium Hyperbolam BG interius ad B tangentium. Ergo,

Ergo, ut ſuperius oſtenſum, æque curvus eſt ac Hyperbola in B. Atque hinc fit quod ſuperficies Sphæræ à circulo genitæ, eadem in reflectendo præſtat quam proxime, quæ ſuperficies Conoidis Hyperbolicæ exacte: hoc eſt radiorum focum E mutat in C, vel focum C in E, ut in *Prop. V. & VI.* oſtenſum eſt.

Prop. VII. Probl. VI.

EX dato foco radiorum, in ſpeculum Sphæricum datum incidentium, eorundem radiorum, poſt reflectionem, focum ſeu imaginem invenire, reſpectu oculi (etiam ubivis extra axem) poſitione dati.

Hucuſque oculum ſuppoſuimus in axe Radiationis poſitum, hoc eſt, in recta per punctum radians, & Sphæræ reflectentis centrum ducta: tam, quod pleræque Machinæ Opticæ ſint hoc modo comparatæ, quam quod imago, ab oculo ſic poſito, viſa, ſit aliâ quâvis multo magis vivida, & diſtincta: quoniam à radiis ſpiſſioribus & magis exacte reflexis producitur, & hoc nomine, imaginis titulum ſibi ſoli vendicat.

Verum ut conſtet ſupra uſurpatam, Problemata Phyſica conſtruendi, & conſtructa demonſtrandi

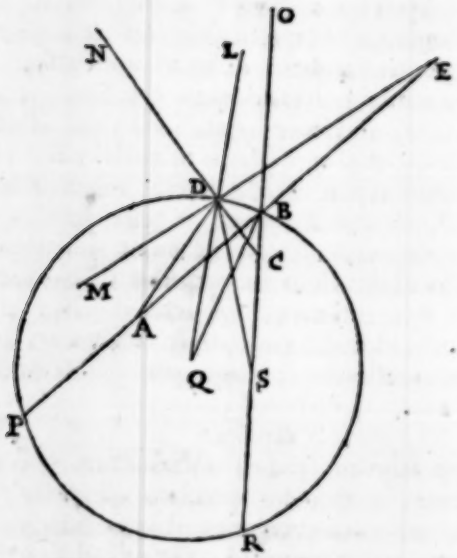
monſtrandi rationem facillimam latius patere, & determinandæ imagini, ab oculo ubivis poſito viſæ ſufficere: Exponatur Sphæra reflectens per ejus maximum circulum BD, cujus planum per punctum radians E, & oculi centrum O tranſeat. Quæritur ubinam verſetur imago puncti E à radiis reflexis facta, reſpectu oculi ad O poſiti.

Primo patet imaginem alicubi in reflexo per O tranſeunte reperiri. Ad illum vero radium inveniendum, Problema ſolvendum eſt, quo, ex datis duobus punctis E & O, & (in eodem plano) circulo reflectente; quæritur punctum in circuli circumferentia tale, ut in illud incidens radius, ab altero datorum punctorum proveniens, in alterum reflectatur. Atque hæc eſt *Prop. XXXIX. lib. V. Opticæ Alhazeni* cui præmittuntur 7 aut 8 Lemmata, & nunc communiter nomine *Problematis Alhazeni* inſignitur. Eſt vero ſuâ naturâ, ſolidum; nec abſque interſectione Sectionis Conicæ cum dato circulo, univerſaliter conſtrui poteſt. Problema iſtud, à pluribus inſignibus Geometris, *Barrovio*, *Sluſio*, *&c.* conſtructum proſtat; elegantiſſimè vero à *Nobiliſſ. C. Hugenio* in *Tranſact. Philoſ. N°. 98.* Ad ipſum igitur punctum C, ubi imago conſpicitur in recta OB (prout à Clariſſ. Viris præſcriptum eſt, ductâ) præciſè determinandum accedimus.

Pro-

Producantur EB, OB donec circulo denuo occurrant in P & R. Biſectis rectis BR, BP in S & A, dividatur SB in C ut SC ſit ad CB ſicut AE ad EB. Dico imaginem oculo O in C viſum iri, non in concurſu reflexi DN cum recta EQ, punctum radians & Sphæræ centrum conjungente, ut *Euclid. Theor.* 17. & 18. *Catoptricæ*, aliique voluere.

Incidat enim radius ED ad punctum D puncto B admodum propinquum: nam hujuſmodi incidentium reflexi ſoli, oculi ad O ſiti pupillam ingrediuntur. Qui enim longiùs à B incidunt, illorum reflexi oculum præterlabuntur, nec ad viſionem quicquam conducunt. Quare dum inveſtigamus punctum C circa quod imago conſiſtit; ſupponendum eſt D coincidere cum B: in quo caſu ED = EB, CD = CB, AD = AB, & SD = SB. Porro quoniam OB eſt radii EB reflexus, erunt anguli ABQ, SBQ æquales; & appropinquante puncto D ad B, & tandem cum illo coincidente, erunt in illo caſu anguli ADQ & SDQ, cum prioribus ABQ & SBQ coincidentes (ſaltem ab illis minimè diverſi) itidem æquales. Sed & illud præterea fiet, ut, puncto D appropinquante ad B, anguli ultimo facti, ſive minimi & evaneſcentes DAB, DQB, DSB deveniant æquales: Nam circulus per puncta D & B coincidentia, & Q ductus; hoc eſt, diametro BQ deſcriptus, & conſequenter, circulum BPQR interiùs con-



tingens, tranſit per puncta media rectarum BP, BR à puncto B utcunque exeuntium: Adeoque anguli DAB, DQB, DSB, in hoc caſu, ſunt in eodem ſegmento circuli iſtius, per puncta D, B, S, Q, & A nunc tranſeuntis. Poſitis hiſce quæ à coincidentia puncti D cum B ſequuntur, cum ex conſtructione ſit AE ad EB ut SC ad CB, erit AE ad DE ut SC ad CD. Et cum latera in triangulis ſint ut ſinus angulorum qui ab illis ſubtenduntur; erit ſinus anguli ADE, ſive anguli MDA, ad

ſinum

ſinum anguli DAB; ſicut ſinus anguli CDS, ad ſinum anguli DSB: quoniam igitur conſequentes æquantur, æquales erunt & antecedentes, & proinde anguli, ad quos ſpectant; ſcil. ADM, & CDS æquales ſunt. Sed prius oſtenſum eſt angulos ADQ, SDQ æquales eſſe: ergo anguli QDM, QDC, & illis ad verticem LDE, LDN æquales ſunt. Quare incidentis radii ED reflexus eſt ND. Idemque de reliquis radiis oculum ad O ſubeuntibus oſtendetur: eorum ſcil. reflexos à puncto C divergere. Quare oculo hoſce radios ſolos recipienti apparebit radiantis E imago per reflectionem facta ad C. q. e. d.

Corol. 1.

Hinc ſequitur radios ad punctum C convergentes, à ſpeculo Sphærico convexo reflexos, ad E convergere, ibique imaginem formare, oculo ubivis in recta BE, ultra E poſito: Item radiantis puncti C imaginem, reflectione ad ſpeculum Sphæricum concavum factam, oculo in recta EB producta, ut ad A poſito, apparere in E.

Corol. 2.

Quod ſi punctum radians E longinquum ſit, tum ratio rectæ AE ad EB fit ratio æqualitatis, eritque ex conſtructione SC æqualis CB: hoc eſt, puncti radiantis longinqui in AB producta ſiti, imago à ſpeculo convexo vel concavo facta, reſpectu oculi ubivis in BR, etiam producta

producta ſi libet, poſiti, erit in medio puncto rectæ BS.

Oculo in axe radiationis poſito, hoc eſt, rectis BA & BS coincidentibus cum recta BQ, hæc eadem conſtructio inſervit, degeneratque in conſtructiones propoſitionum quatuor præcedentium.

Mutatâ vero ſuperficie Sphæricâ BDR in planam, mutatur & hæc conſtructio in illam *Probl. I.* Nam quoniam rectæ AE, SC ſunt in iſto caſu infinitæ, illarum vero intervallum finitum manet; ratio inter illas erit ratio æqualitatis: ergo & hiſce proportionales EB & BC æquales ſunt. Unde patet unicam hujuſce *Probl. VI.* conſtructionem continere præcedentes omnes, quippe minus compoſitas, ut in Geometricis fieri ſolet.

Scholium.

Prædictæ proprietates ideo circulo BDR conveniunt, quod is eandem habeat curvitatem quam ad punctum B obtinet Sectio Conica, umbilicis C & E per B deſcripta, quæ, ut notum eſt, radios reflectit à C rigoroſe divergentes. Identitas curvitatum in prædicto caſu, exinde conſtat: quod Sectionis diametri (ſi opus eſt productæ) ſegmentum in circulo æquicurvo accommodatum æquale ſit diametri iſtius lateri recto: & viciſſim.

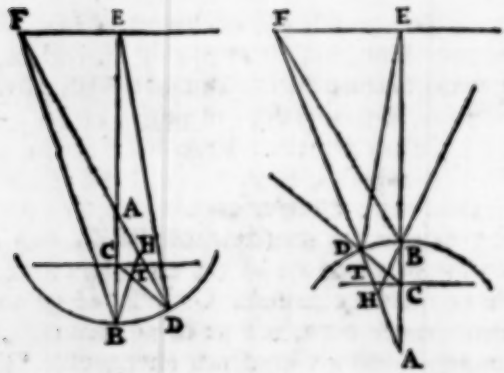
Prop.

Prop. VIII. Theor. II.

SUperficiei planæ radiantis imago à ſpeculo Sphærico facta, eſt etiam plana ſuperficies.

Hactenus puncti cujuſvis radiantis imaginem determinavimus reſpectu oculi, tam in eodem ſpeculi axe cum radiante puncto conſtituti, quàm extra eum. Unde facile eſt corporum radiantium, nempe ex punctis radiantibus conflatorum, imagines determinare. Verum ad faciliorem ejus determinationem, & alia multa ad praxin attinentia, non parum conducet quod præ manibus eſt Theorema: in quo cujuſvis puncti imaginem illam intelligimus, quæ ab oculo in eodem axe cum puncto radiante conſtituto cernitur. Nam de imaginibus, ab oculo alibi poſito viſis (quas tamen ope præcedentis determinare licet) utpote ſecundariis minuſque præcipuis, hic non loquimur: præſertim cum rectæ lineæ hujuſmodi imago ſit hactenus fuſe ſatis à *Clariſſ. Barrovio in Lect. Opt. XVI. & XVII.* conſiderata.

Speculum quodvis Sphæricum exponatur per ejus circulum maximum BD, cujus centrum A, & ſuperficies plana radians per rectam FE. Ex A in FE ducta intelligatur normalis



malis AE, ſpeculo occurrens in vertice B. Inveniatur, per aliquam ex præcedentibus caſui accommodatam, C focus radiorum poſt reflectionem, quorum erat E focus ante incidentiam; per quem ducatur planum CT ad FE parallelum. Dico plani FE imaginem à ſpeculo factam, in plano CT locari.

A quovis radiantis plani puncto F, ad ſpeculi centrum A, productus intelligatur radius FA, ſpeculo occurrens in D, & plano CT in T. Radii incidentis ED reflexus ex conſtructione eſt CD; at radii FB reflexus intelligatur BH, radio FD occurrens in H.

Quoniam angulus FAE parvus eſt ex hypotheſi, arcus DB erit etiam parvus, & tantum non in rectulam deſinens. Et circuli diametro

metro BF deſcripti circumferentia per puncta D & E tranſibit; ob angulos FEB, FDB rectos. Unde anguli BFD, BED, in eodem ſegmento, ſunt æquales. Cumque anguli ad verticem A, ſint æquales vel iidem, erunt FBA, EDA itidem æquales: Ergo hiſce rurſus, per *Prop. I.* æquales, nempe ABH, ADC etiam æquales erunt. Unde triangula ABH, ADC æquiangula ſunt, & conſequenter ſimilia. Quare AB eſt ad AH ut AD ad AC, cumque AB æqualis AD, erit AH æqualis AC. Sed ob parvitatem anguli CAT, AT cenſetur æqualis AC, quare AH ipſi AT cenſenda eſt æqualis. Sed H eſt imago puncti F in radiante plano: unde illa in plano CT locatur. Idem de imagine alterius cujuſvis puncti in plano FE ſimiliter oſtendetur: unde conſtat propoſitum.

Quod ſi radians ſpeculo objectum ſit longinquum, ſingulorum punctorum radiantium imagines erunt, per *Prop. III.* hujus, in mediis punctis ſemidiametrorum ſpeculi ad illa tendentium: hoc eſt, longinqui radiantis imago, ſuperficiei Sphæricæ ſpeculo concentricæ figuram induet. Verùm quia radians, ex hypotheſi, ſub parvo angulo cernitur, tantilla Sphæricæ ſuperficiei portio quæ ab illius imagine occupatur, à plana ſuperficie cui AB eſt normalis, vix abludit. Unde in omni caſu conſtat Propoſitio: nam demonſtratio cuivis caſui inſervit æque ac duobus illis per figuras expreſſis.

Corol.

Si angulus EAF magnus nimis ſit, recta AH ſenſibiliter minor erit quam AT; unde imago viſibilis, ſub nimis magno angulo ex centro ſpeculi viſi, à ſpeculo cavo facta, erit ad ſenſum cava: & quæ à convexo ſpeculo fit, convexa apparebit.

Scholium.

Circa ſuperficierum radiantium imagines à ſpeculis Sphæricis factas, paucula adnotare non pigebit. 1°. Si radians FE ſpeculo cavo objectum magis diſtet à ſpeculo, quam ejus ſemidiametro; illius imago CT magis à ſpeculo diſtabit quam quadrante diametri, minùs vero ſemidiametro: hoc eſt, in aere pendula, inter radians & ſpeculum hærebit, item everſa apparebit; hoc eſt, ſuprema, infima & dextera, ſiniſtra videbuntur. Recedente objecto à ſpeculo, imago verſus ſpeculum accedet, accedente verò objecto, recedet imago, & objecto quaſi obviam facta, cum illo ad centrum coincidet. Pari modo radiantis CT, erit FE imago, cujus ſymptomata ex modo dictis conſtant. Quòd ſi diſtantia BE eouſque augeatur ut radians longinquum fiat, Imaginis CT diſtantia à ſpeculo, diametri quadranti æquabitur. Si verò Sol ſit iſtud radians, in loco ejus imaginis excitabitur combuſtio (ſi ſpeculum ſolari imagine notabiliter latius ſit) propter radios Solares

lares ibi condenſatiores factos. Quod ſi medio inter ſpeculi verticem, & centrum loco, corpus lucidum ponatur; ejus imago, per ſpeculum ad partes longinquas facta, objecta longe diſſita illuſtrabit.

2°. Si radiantis CT à ſpeculo cavo diſtantia CB minor ſit quadrante diametri, ejus imago erit EF (per *Prop. IV. & VIII.* hujus) ultra ſpeculum poſita, & erecta ut in plano ſpeculo, & quæ accedente objecto ad ſpeculum, ad illud etiam accedit, & è converſo. Similiter radiantis FE imago à convexo ſpeculo facta erit CT, cujus ſymptomata, ex dictis, facile deteguntur: accedente quippe radiante ad ſpeculum, accedet etiam imago, illo verò ad diſtantiam licet immenſam recedente, imago ad mediam inter ſpeculum ejuſque centrum diſtantiam ſe ſiſtet.

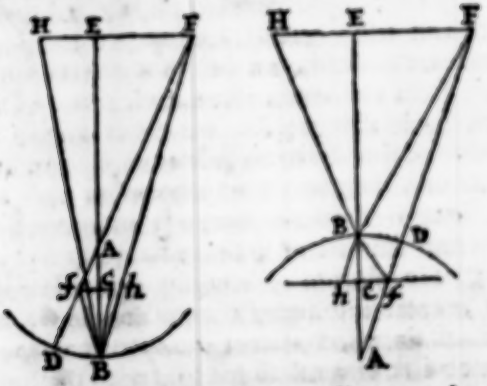
3°. Singulorum radiantis punctorum radii ita inflecti intelligantur, ut imaginem CT facturi ſint; ſed interventu ſpeculi convexi BD, ab illa facienda impediantur. Ex ſuperioribus patet, radios hoſce à ſpeculo reflexos, imaginem FE facturos, cujus proprietates, ſitus, & figura, reſpectu viſibilis CT (ſi modo viſibile dicendum ſit) facilè ad ſuperiorum normam eruuntur.

In prædictis aliiſque omnibus caſibus, ratio imaginis ad viſibile datur; quoniam ſub eodem angulo vel æqualibus angulis ex ſpe-

culi centro apparent. Verùm opportunius in hunc finem erit *Theorema* ſequens.

Prop. IX. Theor. III.

RAdians ejuſque imago à ſpeculo facta ſub æqualibus angulis videntur ex vertice ſpeculi.



Ex A centro ſpeculi, in radians HF demittatur normalis AE (quæ, per *Prop. VIII.* imagini *f b* itidem normalis erit) ſpeculo occurrens in vertice B. Jungantur rectæ BF, BH, B*f*, B*b*. Dico angulos HBF, *b* B*f* eſſe æquales. Jungatur F*f*, tranſibit hæc per centrum A: nam ex hypotheſi cujuſvis puncti imago locatur in axe radiationis. Pari modo puncta

cta H, A & *b* in eadem recta locantur. Ex natura imaginis, BE eſt ad EA ut BC ad CA: ergo BE eſt ad BC ut EA ad CA. Sed propter æquiangula triangula AEF, AC*f*; EA eſt ad CA ut EF ad C*f*. Quare BE eſt ad EF ut BC ad C*f*. Et cum anguli BEF, BC*f* ſint recti, erunt anguli EBF, CB*f* æquales. Eodem modo ſunt EBH, CB*b* æquales: unde HBF, *b*B*f* æquales erunt. q. e. d.

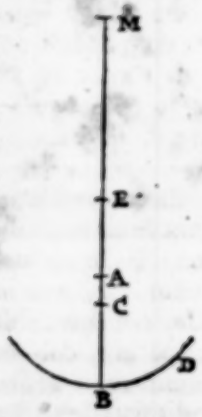
Corol.

Linea radians FEH ejuſque imago *fcb*, ſunt inter ſe ut illarum diſtantiæ à vertice, BE, BC. Et ſi radians ſit ſuperficies, erit hæc ad ipſius imaginem in prædicta ratione duplicata. Unde ſi detur diſtantia radiantis, & imaginis à ſpeculo, dabitur ratio imaginis ad radians. Similiter ſi radiantis imago à pluribus ſpeculis fiat, invenietur ratio radiantis primi ad imaginem ultimam. Sequitur porro lineam FH, & ejus imaginem *fb* in eadem ratione ſecari à recta BE, verticem & centrum conjungente: ſive eſſe FE ad EH ut *f*c ad c*b*.

Prop. X. Probl. VII.

RAdiantis poſitionem, reſpectu ſpeculi dati, talem invenire, ut ejus imago à ſpeculo facta æqualis ſit datæ cuivis figuræ radianti ſimili:

li: vel, quod eodem redit, ut radians ad ipſius imaginem per ſpeculum factam, datam habeat rationem.



Detur ſpeculum BD cujus ſemidiameter BA, ſitque data ratio BA ad AM. Si radians ſit linea, biſecetur BM in E, & per ſuperiorum aliquam, inveniatur focus C foco E correſpondens. Dico C eſſe locum radiantis lineæ. Quoniam ex relatione punctorum C & E, BC eſt ad CA ut BE ad EA; erit BC ad BC + CA ut BE ad BE + EA: hoc eſt, ob æquales BE & EM, erit BC ad BA ut BE ad AM: & viciſſim BC ad BE ut BA ad AM. Sed (per *Corol. Prop. IX.*) BC eſt ad BE ut linea radians in C poſita cui BC normalis eſt, ad ipſius imaginem in E: ergo linea radians in C eſt ad ejus imaginem à ſpeculo dato BD ad E factam, ut BA ad AM, hoc eſt, in ratione data. q. e. d.

Quod ſi radians ſit ſuperficies, loco AM in præcedente conſtructione, ſumenda eſt recta ad quam BA rationem habet ſubduplicatam ejus quam habet ad AM.

DIOPTRI-

DIOPTRICÆ

ELEMENTA.

CATOPTRICA abſolutâ Dioptricam aggredimur, cujus ope plures & uſui accommodatiores Machinæ hactenus ſubminiſtrantur, & ad Naturæ arcana retegenda propiùs admittimur. Nam faciliùs Vitro quam Metallo figura debita inducitur, & inducta diutius conſervatur: Nec lentes æque ac ſpecula, propter aeris qualeſcunque injurias, polituræ jacturam patiuntur. Difficillime etiam conficietur ſpeculum quod confertos ac validos radios reflectit quales Lens vitrea tranſmittit.

Verùm præter difficultates haſce Phyſicas quarum cauſæ à Dioptrica non ſunt petendæ, propter ſequentem rationem lentes ſunt ſpeculis in praxi præferendæ: nempe, Error ſpeculi quaſi ſextuplo majorem in radio reflexo errorem producit, quam æqualis error Lentis vitreæ, cum radius tranſit ex aere in vitrum, & quadruplo majorem, cum radius tranſit ex vitro in aerem: Nam per *Theor. I.* error incidentiæ duplo majorem producit errorem in radio reflexo, ſed triplo fere minorem in radio

radio ab aere ad vitrum, duploque minorem in radio à vitro ad aerem refracto, ut ad *Schol. 2. Prop. XI.* patebit.

In Dioptrica ſicut prius in Catoptrica, oculum in axe radiationis poſitum ſupponimus: Quoniam poſitio hæc ubi ſolæ lentes adhibentur facilè poteſt obtineri, ubi vero ſpecula lentibus miſcentur, axis iſte (ex *Corol. 1. Probl. I.*) poteſt in dato quovis angulo inclinari.

Prop. XI. Theor. IV.

LUcis radius ad ſuperficiem planam Medii diverſæ denſitatis ita refringitur, ut poſitis iiſdem mediis, in omni inclinatione, Sinus rectus anguli incidentiæ ſit in eadem ratione ad Sinum rectum anguli refracti.

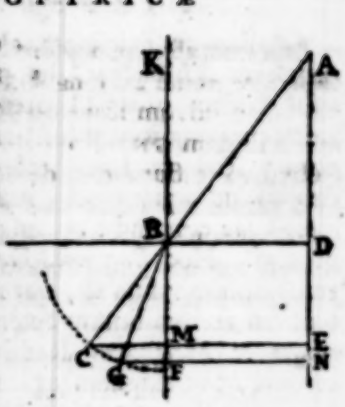
Mathematico ſufficit hoc Theorema experientiâ comprobâſſe, ut ex illo poſito, datæ figuræ proprietates in refringendo oſtendat, vel figuram inveſtiget cujus leges refringendi dantur: tamen ob rationes ad conſimile Theorema Catoptricum demonſtrandum impellentes, ejus demonſtrationem pertexemus.

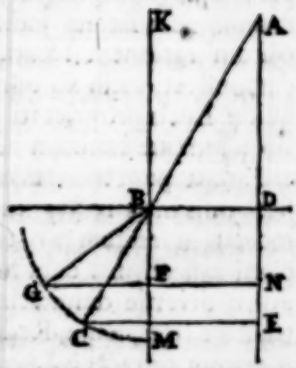
Ad

Ad illam conficiendam, alii, alia & prorſus contraria adhibuere Aſſumpta Phyſica. *Carteſius* eodem aliis Theoremate potitus (qui Lucis propagationem inſtantaneam in reliquis docet) Radium Lucis celeriùs per Medium denſius ut aquam vel vitrum ferri, in *Dioptrica ſua* contendit, quam per minùs denſum ut aera. Hoc *Barrovio*, *Fermatio* & aliis durum omnino viſum eſt, qui in contrariam ſententiam veriſimiliorem abière. Præterea *Barrovius* & *Maignanus* Radii Lucis craſſitiem certam, ut ut exiguam (quam tanquam nullam prorſus negligit *Carteſius*) Theoremati demonſtrando neceſſariam judicârunt. Nos Geometrarum rationem ſecuti, hujus Theorematis demonſtrationem ab omni ſecta remotam, & unicæ Lucis proprietati ſimpliciſſimæ ſub initio aſſumptæ innixam adornabimus.

Lux à puncto A manans, & in plano inflectionis inter rectas AB & AD comprehenſa, incidat in rectam BD communem ſectionem plani inflectionis cum ſuperficie plana Medii BCED diverſæ denſitatis. (Hanc verò ſeorſim tractare licet, quia Radii illam componentes, & eorum refracti à Luce circumfuſâ diſtincti, in prædicto plano verſantur per *ax.* 2.) Radiorum extremorum alter AD ponatur ad rectam BD normalis, cujus proinde refractus DE (qualiſcunque ſit denſitas medii BE) radio AD in directum erit: alter vero AB angulum

quemvis cum AD continens, rectæ BD media dirimenti occurrat in B, per B ducatur recta KBF ad AE parallela. Prædicta Lux inter rectas AB, AD contenta, propagari intelligatur in medio DG, inter rectas DE & BG in infinitum continuatas: hoc eſt, Radii AB intelligatur BG refractus, ſive Lux tranſeat è Medio rariori in denſius, ut in *fig.* 1. ſive è denſiori in rarius, ut in 2. Dico ſinum anguli ABK, eandem, in quavis radii inclinatione, habere rationem ad ſinum anguli GBF.





Centro B & diſtantiâ quâvis BG, deſcribatur arcus circuli radio BG occurrens in G, à quo demittatur ad AN normalis GN, rectam KF interſecans ad F.

Lux

Lux quæ ab A procedens diffunditur in rectam BD, positâ BG longitudine refracti ipsius AB, intra novum istud Medium DG diffunditur in rectam GN: Nam spatia in quæ prædicta Lux diffunditur, deinceps computanda sunt per hujusmodi rectas rectæ BD parallelas, quoniam diffusionis gradum priorem ad rectam BD amittit, & novo dehinc gaudet. Manente jam rectâ BD media dirimente, auferri intelligatur Medium DG, in quo AB refringitur in BG, & hujus loco aliud Medium DC diversæ densitatis substitui, in quo radius AB refringitur in BC ex. gr. circulo occurrentem ad C, per quod ducatur recta CE rectæ BD parallela occurrens ipsi AN in E, & KF in M. Erit recta CE spatium in quod eadem Lux diffunditur intra Medium DC, manente eâdem refracti longitudine, nempe BC. Si à rectis GN, CE in quas diffunditur Lux, auferantur rectæ FN, ME quæ à Mediorum *Facilitatibus*, hoc est, *virtutibus ad Lucem diffundendam*, non pendent (Nam manente longitudine & positione Radii AB, prædictæ rectæ FN, ME eædem & invariatæ manent, auctis utcunque aut minutis, aut etiam annihilatis Mediorum DG, DC Facilitatibus.) relinquuntur GF, CM genuini effectus facilitatum Mediorum DG & DC respectivè. Igitur, cùm omnia eadem ponantur quæ attinent ad refractionem radii AB à medio DK ad media

diverſa DG & DC, præter ipſorum mediorum DG, DC denſitates (Nempe idem medium DK è quo lux exit, idem angulus incidentiæ ABK radii AB, & eadem radii intra Medium ſecundum refracti longitudo DG vel DC) prædictæ rectæ GF, CM eandem habent rationem quam mediorum DG, DC facilitates, ipſarum productrices: Nam Effectus ſunt Cauſis ſuis proportionales.

Si jam Medium DC, nempe in quo radius AB refringitur in BC, ſit idem cum Medio DK, quo caſu radii AB refractus BC (liceat illum ſic appellare) eſt incidenti AB in directum, erit etiamnum GF ad CM ut Medii DG facilitas ad facilitatem Medii DC, hoc eſt, ex conſtructione, ad facilitatem medii DK. Porro CM eſt ſinus rectus anguli CBM, vel anguli ABK qui eſt angulus incidentiæ radii AB, & ad eandem ſemidiametrum, eſt GF ſinus rectus anguli GBF, nempe anguli refracti radii ejuſdem: Quare ſinus anguli incidentiæ eſt ad ſinum anguli refracti, quæcunque ſit radii AB inclinatio ad refringens planum (nam angulus DAB cui ABK æqualis, ſumptus eſt ad libitum) ut medii DK facilitas ad facilitatem medii DG, radium AB in BG inflectentis. Sed poſitis iiſdem mediis, mediorum denſitates, & hinc ortæ facilitates, harumque ratio manent: Ergo in omni radii inclinatione, eadem manet ratio ſinûs anguli incidentiæ ad ſinum anguli refracti. q. e. d.

Theo-

Theorema hoc, ſic breviter in phraſi Geometrica, demonſtratur. Manente Radii Incidentis poſitione, Refractus idem manet, quæcunque ſit longitudo radii incidentis AB: Hujus ergo longitudinis nulla ratio eſt habenda, ſive recta AB habenda eſt pro nullâ. Simul igitur evaneſcit recta FN, certam habens ad AB rationem. Unde recta GN in quam Lux diffunditur ad datam, intra medium DG, diſtantiam BG, vertitur in GF unicam & determinatam, ac propterea à Natura adhibitam pro Menſura facilitatis medii DG cui ortum debet. q. e. d.

Quod ſi in tranſitu Radii è denſiori medio in rarius (*fig.* 2.) ejus inclinatio ſit talis, ut GF quæ eſt ad CM in ratione facilitatum datorum mediorum, ſemidiametrum BG excedat; tum radii AB refractus erit nullus (ad exemplum caſûs impoſſibilis in Problemate Geometrico) Verùm qui refractus eſſe debuit, non ſubibit medium rarius DG, ſed ab illius ſuperficie reflectetur, ſecundum Legem *Theor. I.* in quo caſu Lex hujus Theorematis (quippe univerſalioris) etiamnum obtinet.

Propoſitionis hujus converſa ſatis conſtat, Nempe quòd refractus cujuſvis incidentis rite deſignatur, cùm ſinus anguli incidentiæ eſt ad ſinum anguli ſub deſignato, & recta ad refringentem ſuperficiem normali, in ratione facilitatum datorum mediorum, quæ eſt Menſura

ſura refractionis inter illa: Nam incidentis propoſiti refractus non poteſt eſſe alius à deſignato.

Inventio præcedentis Theorematis in Dioptricis primarii, *Carteſio* vulgo tribuitur; quamvis fuerit notum *Willebrordo Snellio*, decem annos ante editam *Carteſii Dioptricam* mortuo: *Voſſius* enim *pag.* 36. *lib. de Natura & Proprietate Lucis* An. MDCLXII. *Amſtel.* editi, ex *Snellii* adverſariis à ſe viſis refert *Snellium* inveniſſe, eandem ubique eſſe rationem inter Secantes angulorum qui ſunt complementa anguli incidentiæ, & anguli refracti ad rectum: Notum verò eſt ſecantes angulorum eſſe reciprocè ut ſinus complementorum ad rectum: quoniam ſemidiameter eſt media Geometrica inter illas.

Cum de ſecantibus incidit ſermo, videre eſt quàm parum aberat perſpicaciſſimus *Keplerus* ab hujus Theorematis inventione, qui, *Prop. V. & VI. Paralipom. in Vitellionem*, ſecantes haſce adhibuit pro refractionum menſura partiali.

Corol. 1.

Si radii incidentis AB refractus ſit BG, reliquis manentibus, incidentis radii GB erit BA refractus: Manent quippe mediorum facilitates, ad quarum rationem angulorum ſinus exiguntur.

Corol.

Corol. 2.

Ex demonſtratione hujus Theor. ſequitur quòd, ſi ratio A ad B metiatur refractionem inter media A & B, & ratio A ad C refractionem inter media A & C; ratio B ad C erit menſura refractionis inter media B & C. Quod etiam liquet, ſupponendo communis medii A inter plana parallela reliquorum duorum poſiti craſſitiem evaneſcere: Nam hoc pacto, angulis iiſdem manentibus, radii per tria media propagati pars in medio A eveneſcit.

Corol. 3.

Hinc etiam ſequitur quòd, ſi manente poſitione radii AB, rectæ inflectentis BD poſitio mutetur angulo ex. gr. E, refracti BG poſitio mutabitur angulo *e* qui eſt ad E ut intervallum ipſarum I & R ad I (ſi quantitatum I & R ratio eadem ſit cum ratione ſinûs anguli incidentiæ ad ſinum anguli refracti, & anguli ſint tam parvi ut eandem cenſeantur habere rationem cum ſuis ſinibus) & anguli *e* & E ſiti ſunt verſus eaſdem partes à rectis BG & BD reſpectivè, cùm I excedit R, ſed in oppoſitas cùm R excedit I. Similiter ex hac Propoſitione fiet judicium de mutato angulo GBE, cùm angulus ABK ob aliam quamvis cauſam mutatur.

Scholium 1.

Prædicta refractionis lex confirmatur ex Naturæ conſilio, Operationes ſuas per vias faciliores

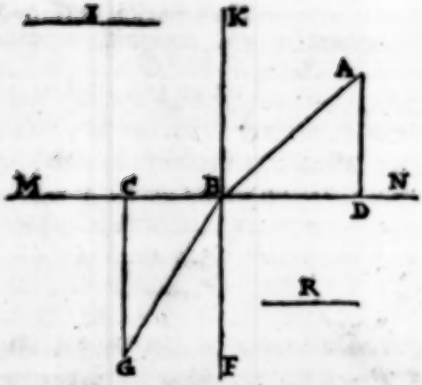
ciliores & expeditiores ubique inſtituentis: Quod legitimum eſſe Axioma, ſuperiùs in Catoptricis experti ſumus. Nempe Lumini ab A ad G procedenti, tale aptatur punctum incidentiæ B, ut iter A B G *tempore breviſſimo* conficiat. Illud vero incidentiæ punctum inveniri poteſt ope cujuſvis methodi (*Fermatianæ* ex. gr.) quâ maximum & minimum determinatur: facillimè autem modo ſequente.

Problema.

DAtis duobus punctis in mediis diverſæ denſitatis, datâque poſitione ſuperficie planâ dirimente media quorum denſitates itidem dantur: invenire punctum in prædicta ſuperficie tale, ut Mobile ab uno datorum punctorum per quæſitum ad alterum procedens, *tempus* in itinere inſumat *minimum*.

Dentur puncta A & G, ſitque M N ſuperficies plana dirimens media diverſæ denſitatis, ſive potius, communis ſectio plani inflectionis per A & G protenſi, cum ſuperficie prædicta media dirimente: Nam (per *Ax.* 2.) punctum quæſitum in illa reperietur. Rectæ I & R exponant Lucis Velocitates in Mediis D K, C F reſpectivè.

Quo-



Quoniam datâ Mobilis Velocitate, Tempus eſt ut Via percurſa, & datâ Viâ, Tempus eſt ut Velocitas inverſè: neutrâ datâ, erit Tempus ut Velocitas inverſè & Via directè, conjunctim. Igitur Tempus quo recta AB percurritur, exponetur per R×AB, & Tempus quo BG percurritur per I×BG: & propterea Tempus quo Via ABG percurritur, ex binis compoſita, exponetur per quantitatem R×AB + I×BG, quam oportet eſſe *minimam*.

Ex data poſitione punctorum A & G & rectæ MN, dantur magnitudine rectæ AD, GC & DC quas vocamus *a*, *c* & *d* reſpective. Dicatur CB *x*. Unde $BD = d - x$, $AB = \sqrt{d^2 - 2dx + x^2 + a^2}$, & $BG = \sqrt{c^2 + x^2}$. Oportet igitur $R \times \sqrt{d^2 - 2dx + x^2 + a^2} + I \times \sqrt{c^2 + x^2}$ eſſe *minimum*.

Hoc verò fit (ut in Geometricis verſato conſtat) quando *fluxio* ipſius $R \times \sqrt{d^2 - 2dx + x^2 + a^2} + I \times \sqrt{c^2 + x^2} = 0$. Verum per ſummi Geometræ *D. Iſ. Neutoni Methodum*, Geometris hodie familiarem, *inveniendi fluxiones datâ æquatione fluentes quotcunque involvente*, (quorſum etiam ſpectat *Clariſſ. Leibnitii Calculus Differentialis*) quam videas *Cap. XCV. Vol. Alteri Operum Mathemat. Celeberrimi Walliſii*, *fluxio* ipſius $R \times \sqrt{d^2 - 2dx + x^2 + a^2} + I \times \sqrt{c^2 + x^2}$ eſt $\frac{R \times -2d\dot{x} + 2x\dot{x}}{2\sqrt{d^2 - 2dx + x^2 + a^2}} + \frac{I \times 2x\dot{x}}{2\sqrt{c^2 + x^2}}$. Poſitâ ergo hâc æquali nihilo, prodit $\frac{IRx}{\sqrt{c^2 + x^2}} = \frac{R \times d - x}{\sqrt{d^2 - 2dx + x^2 + a^2}}$. Et ſubſtituendo, loco valorum, ipſas rectas in Schemate deſignatas, fit $\frac{I \times CB}{BG} = \frac{R \times BD}{AB}$. Et ſi BG = AB, proveniet $I \times CB = R \times BD$, ſive BD. BC :: I. R.

Igitur ſi recta DC dividatur in B ita ut DB ſit ad BC in ratione data I ad R, Lumen conficiet iter ab A ad G (& propterea etiam iter à G ad A regrediendo) tempore breviſſimo ſive minimo, percurrendo Viam ABG. Sed DB & BC ſunt ſinus recti angulorum BAD & BGC, hoc eſt, angulorum ABK, GBF, nempe anguli incidentiæ & anguli refracti. Quare ut Tempus

pus tranſitûs ab A ad G (vel à G ad A) ſit *minimum*, oportet radium ita incidere ut ſinus anguli incidentiæ ſit ad ſinum anguli refracti in ratione 1 ad R, hoc eſt, in ratione Velocitatum Lucis in prædictis Mediis, ſive (ut ſuperiùs in demonſtratione *Prop. XI.* oſtenſum eſt) in ratione facilitatum eorundem Mediorum, à quibus mobilis in illis lati velocitates pendent.

Cùm innumera ſint puncta talia in plano media dirimente (quorum duo in MN rectâ) ut Lumen ab A ad G (vel à G ad A) per eorum quodlibet tendens, Tempus inſumeret æquale dato cuivis quod *minimum* excedit, nulla excogitari poteſt ratio cur Lumen per illorum punctorum unum potiùs quam per aliud tranſeat: Igitur per nullum præter determinatum illud & ſui generis unicum B tranſibit.

Scholium 2.

Cum lucis radius ex aere tranſit in vitrum, obſervamus ſinum anguli incidentiæ eſſe ad ſinum anguli refracti ut 3 ad 2 in numeris rotundis: & in tranſitu ab aere in aquam eſt 1 ad R (quibus ſymbolis in ſequentibus utimur ad deſignandam rationem ſinûs anguli incidentiæ ad ſinum anguli refracti, quæ refractionem metitur) ut 4 ad 3. Et è contra in tranſitu radii ex vitro in aerem, erit 1 ad R ut 2 ad 3, per *Corol.* 1. Unde patet ratio cur radius in vitro, impingens in aeris ſuperficiem

obliquiùs quam pro angulo incidentiæ 42 circiter grad. aerem non ſubeat, ſed ab illius ſuperficie reflectatur: Nam recta GF quæ eſt ſeſquialtera ſinus 42°, radium excedit, in quo caſu Lucem reflecti jam ſupra adnotatum eſt.

Porro quoniam in tranſitu radii ex aere in vitrum, 1 ſeſqui-altera eſt ipſius R, & in tranſitu ex aere in aquam, 1 eſt ſeſqui-tertia ipſius R: erit (per *Corol.* 2.) in tranſitu ex aqua in vitrum, 1 ſeſqui-octava ipſius R.

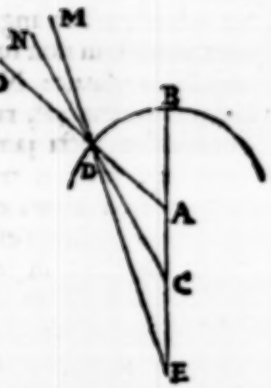
Et ex *Corol.* 3. ſequitur Errorem Radii refracti ſubtriplum eſſe Erroris Superficiei vitreæ unde ducit originem, & verſus eaſdem cum illo partes, cùm radius ex aere tranſit in vitrum, ſed ejus tantum ſubduplum, & verſus contrarias partes, cùm tranſit ex vitro in aerem.

Prop. XII. Theor. V.

SIt BD ſuperficies quævis dirimens media diverſæ denſitatis, in quam incidat radius ab E procedens qui refringatur in DN, manente eâdem ſuperficie media dirimente, ſed tranſpoſitis mediis, dico radii MD radio ED in directum poſiti refractum DC, priori refracto ND in directum eſſe.

Duca-

Ducatur recta ADO lineæ BD in D perpendicularis.



Cùm DN ſit radii ED refractus, erit (per præcedentem) ſinus anguli EDA ad ſinum anguli NDO in ratione I ad R, & ſi tranſpoſita intelligantur media, erit menſura refractionis ex medio BDM in medium BDE ratio I ad R: hoc eſt, poſito MD radio incidente ejus refractus DC talis erit, ut ſinus anguli MDO ſit ad ſinum anguli ADC ut I ad R: hoc eſt, ex modò oſtenſis, ut ſinus anguli ADE ad ſinum anguli NDO. Igitur cùm anguli EDA, MDO ſint æquales, & proinde etiam eorum ſinus, erunt ſinus angulorum ADC, NDO æquales, ac proinde ipſi etiam anguli. Quare rectæ ND, DC ſunt in directum poſitæ. q. e. d.

Corol.

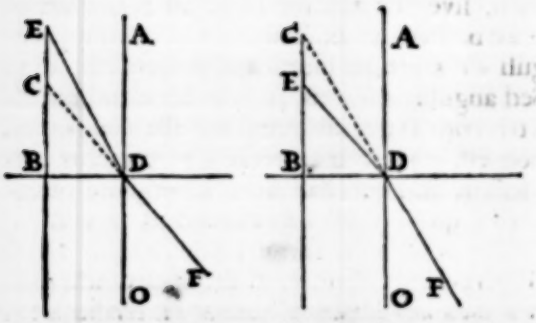
Si radii ab E divergentes refracti ad BD ſuperficiem, à puncto C divergant, tranſpoſitis mediis, manente eâdem ſuperficie media dirimente, radii ad E convergentes poſt refractionem ad BD, ad punctum C convergent.

Itaque

Itaque quæ de radiis divergentibus oſtendentur, ea convergentibus pariter applicari poſſunt. Quare in ſequentibus de radiis divergentibus ſolummodo agemus, ſubintelligentes etiam radios convergentes ex Theoremate hoc determinandos.

Prop. XIII. Probl. VIII.

EX dato foco radiorum divergentium, eorundem radiorum focum, poſt refractionem ad planam ſuperficiem medii diverſæ denſitatis invenire, reſpectu oculi in axe verſantis.



Per E datum focum radiorum divergentium, ducatur recta E B perpendicularis ad planam ſuperficiem B D, Medii ſive denſioris, ſive rarioris,

rioris, in hac ſumatur punctum C, ita ut CB ſit ad EB ut I ad R. Dico C eſſe focum quæſitum.

Incidat quilibet radius ED. Per D ducatur AO parallela ad EB. Juncta CD producatur in F.

Si radius ED ſit ſatis vicinus rectæ EB (nam de radiis prope axem incidentibus hìc tantum loquimur, cùm hi ſoli, poſt refractionem, oculum ex hypotheſi in EB axe radiationis producto poſitum afficiant, obliquioribus oculi pupillam præterlabentibus, & ad viſionem puncti E nullo modo conducentibus, ut jam ſupra in Catoptrica monuimus) erit ED fere æqualis EB, & CD ipſi CB. Quare CD eſt ad ED ut I ad R: ſed CD eſt ad ED ut ſinus anguli BED, ſive illi æqualis EDA, ad ſinum anguli BCD, ſive illi æqualis ODF: ergo ſinus anguli EDA eſt ad ſinum anguli ODF ut I ad R. Sed angulus EDA eſt angulus incidentiæ radii ED: ergo ODF eſt refractus illi competens, hoc eſt, DF eſt incidentis ED refractus. Et idem de alio quolibet ab E divergente oſtendetur, quare C eſt focus quæſitus. q. e. i.

Corol. I.

Hinc & ex *Corol.* I. *Prop. XI.* ſequitur, iiſdem quæ priùs poſitis, radios in medio BDO ad C convergentes, poſt refractionem, ad E convergere. Et ſi tranſpoſita intelligantur media, hinc & ex *Prop. XII.* ſequitur radios

in

in medio BDO ad E convergentes, poſt refractionem ad punctum C convergere; & radios parallelos, poſt refractionem ad ſuperficiem planam medii cujuſvis, etiamnum parallelos manere.

Corol. 2.

Si BDA ſit aqua & BDO aer, erit CB ad EB ut 3 ad 4: unde fit ut aqua quartâ parte minus profunda appareat. Si vero BDA vitrum ſit, erit EB ſeſquialtera rectæ CB.

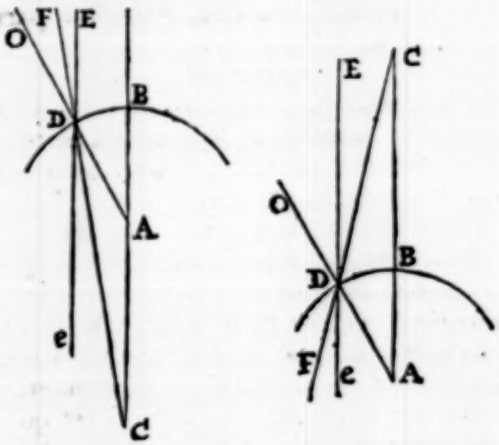
Scholium.

Quod de radio quovis incidente demonſtratur, nempe DC ejus refractum retrorſum ad concurſum cum EB productum, eſſe ad incidentem ED ut I ad R, de perpendiculariter incidente EB etiam verum eſt: Nam hujus refractus BC retrorſum productus, licet quoad poſitionem ſit idem cum incidente, tamen quoad longitudinem eſt ad ipſum in eadem illa ratione I ad R. Et quoniam radius hic per oculi centrum tranſiens, aliique huic proximi, ſoli ſenſum movent, fit ut focus radiorum ab E divergentium, & ad BD refractorum, oculi reſpectu, ſit C. Hæc ſpeculatio etiam ad ſequentia extenditur.

Prop. XIV. Probl. IX.

RAdiorum parallelorum, in ſuperficiem Sphæricam medii diverſæ

diverſæ denſitatis incidentium, poſt refractionem focum invenire.



Sphærica ſuperficies cujus centrum A, deſignetur per circuli circumferentiam BD, per A agatur, radiis incidentibus parallelus axis AB, circulo occurrens in vertice B; in quo ſumatur punctum C tale, ut BC ſit ad AC ſicut I ad R. Dico C eſſe focum quæſitum.

Incidat quilibet radius ad D, ducantur rectæ AD, CD & producantur. Sinus anguli BAD, aut huic æqualis anguli EDO, eſt ad ſinum anguli CDA (vel complementi hujus ad duos rectos) ut CD ad AC, ſive (evaneſcente arcu DB ob rationes jam ſæpiùs dictas) ut CB ad AC, hoc

eſt, per conſtructionem, ut I ad R: ſed EDO eſt angulus incidentiæ radii ED, ergo DC eſt hujus refractus. Similiter demonſtrabitur alium quemvis è parallelis poſt refractionem per C tranſire. Igitur C eſt focus. q. e. d.

Corollaria.

Hinc & ex *Corol.* 1. *Prop. XI.* & *Corol. Prop. XII.* hæc conſequuntur.

1°. Radii in aere axi paralleli, poſt refractionem ad vitri ſuperficiem Sphærico-convexam, convergunt ad punctum cujus diſtantia à vertice æquatur tribus ſemidiametris Sphæræ.

2°. Radii in vitro divergentes à puncto, tribus ſemidiametris, ab aeris ſuperficie Sphærico-concava diſtante, poſt refractionem, paralleli fiunt rectæ per punctum radians & Sphæræ centrum ductæ.

3°. Radii in vitro axi paralleli, poſt refractionem ad aeris ſuperficiem Sphæricam convexam, divergunt à puncto cujus diſtantia à vertice, Sphæræ diametro æqualis eſt.

4°. Radii in aere convergentes ad punctum diametro Sphæræ ultra concavum vitrum diſtans, poſt refractionem ad ſuperficiem concavam vitri, paralleli evadunt rectæ per Sphæræ centrum & prædictum punctum ductæ.

5°. Radii in aere axi paralleli, poſt refractionem ad vitri ſuperficiem concavam, diver-

divergunt à puncto tribus ſemidiametris à vertice diſtante.

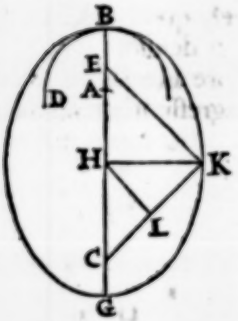
6°. Radii in vitro convergentes ad punctum tribus ſemidiametris ultra aeris ſuperficiem Sphærico-convexam diſtans, poſt refractionem, paralleli fiunt rectæ per Sphæræ centrum & punctum prædictum ductæ.

7°. Radii in vitro axi paralleli, poſt refractionem ad aeris ſuperficiem Sphæricoconcavam, convergunt ad punctum, Sphæræ diametro à vertice diſtans.

8°. Radii in aere divergentes à puncto diametro Sphæræ vitreæ diſtante, poſt refractionem ad vitri ſuperficiem convexam, paralleli fiunt rectæ per punctum prædictum & Sphæræ centrum ductæ.

Scholium.

Circulus generator Sphæræ BD, eandem habet curvitatis rationem cum Ellipſi per B tranſeunte, cujus rotatione fit Sphærois ex medio denſiore conſtans quæ radios in medio rariore ambiente rectæ AB parallelos, ad C congregat. Nam vulgo notum eſt oportere Ellipſeos iſtius axem majorem BG eſſe ad diſtantiam umbilicorum EC ut I ad R. Poſitâ jam conſtructione *Schol. Prop. IV.* BG eſt ad EC ut KC ad HC, hoc eſt ut HC ad CL, id eſt ut KC + HC ad HC + CL, ſive ad HC + CK — LK, hoc eſt ut BC ad BC multatam ſemiſſe lateris recti axeos BQ (nam LK oſtenſa



eſt *Schol. Prop. IV.* æqualis ſemiſſi prædicti lateris recti) ſed ex conſtructione *Prop.* hujus, puncti C is eſt ſitus, ut BC ſit ad AC ut I ad R, hoc eſt, ut BG ad EC: ergo BC eſt ad AC ut BC ad BC dempto ſemiſſe lateris recti ad majorem axem pertinentis: quare AC æqualis eſt BC dempto ſemiſſe prædicti lateris recti: ergo AB æqualis eſt ſemiſſi lateris recti. Quare circulus BD æque curvus eſt ac Ellipſis BKG in B (per *Corol.* 1. *Prop. XX. lib.* 1. *Vinc. Viviani de Maximis & Minimis.*) Unde fit ut Sphæra à prædicto circulo genita, eadem in refringendo præſtet quam proxime quæ Sphærois oblonga ex Ellipſis rotatione genita exacte; nimirum ut radii in medio rariori ambiente, rectæ BG paralleli, poſt refractionem ad ejus ſuperficiem, ad punctum C convergant.

Modo non abſimili, ope *Scholii Prop. VI.* oſtendetur, circulum BD (*fig.* 2.) æqui-curvum eſſe curvæ ad verticem Hyperbolæ tranſeuntis per B, & generantis Conoidem ex medio rariore conſtantem, quæ radios in denſiore medio ambiente rectæ AB parallelos ita refringit, ut poſtea à puncto C divergant: vel,

vel, quod eodem redit (per *Prop. XII.*) ex medio denſiore conſtantem, quæ radios in denſiore iſto rectæ AB parallelos ita refringit ad ingreſſum in medium rarius ambiens, ut ad prædictum punctum C convergant.

Prop. XV. Probl. X.

DAto foco radiorum divergentium, & in ſuperficiem Sphæricam datam medii diverſæ denſitatis incidentium, eorundem radiorum focum poſt refractionem invenire.

Sphærica ſuperficies deſignetur per maximi circuli circumferentiam BD. Ducatur per datum focum E & circuli centrum A, recta EA circumferentiæ occurrens in B, in qua ſumatur punctum C tale, ut ratio compoſita ex rationibus EA ad AC & CB ad BE æqualis ſit rationi I ad R. Dico C eſſe focum quæſitum.

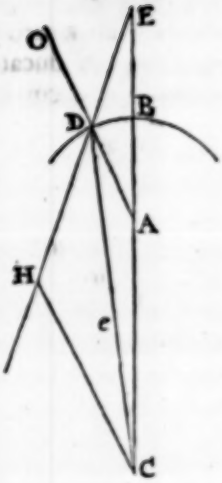
Octo præcipuos hujus Prop. caſus eâdem operâ demonſtrabimus totidem figuris expreſſos, quorum quatuor primi ponunt I majorem quam R, reliqui minorem, & qui inter ſe differunt prout focus datus ſitus fuerit, vel citra vel ultra focum radiorum parallelorum,

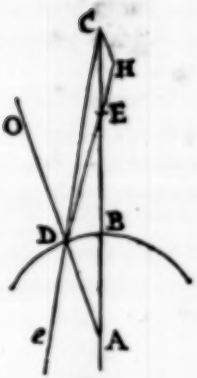
rum, vel prout ſuperficies refringens convexa fuerit vel concava.

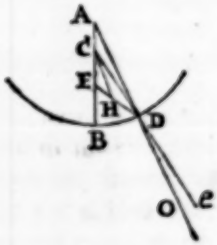
Incidat radius ad libitum ED ab E procedens. Jungantur AD, DC, & per C ducatur recta ad AD parallela, rectæ ED occurrens in H.

Coincidente ferè puncto D cum B, erunt CD, CB item ED, EB ferè æquales. Quare ratio I ad R æqualis eſt rationi EA ad AC & rationi CD ad ED ſimul; hoc eſt (ob parallelas AD, CH) rationi CD ad ED & rationi ED ad DH ſimul, ſive rationi CD ad DH: ſed CD eſt ad DH ut ſinus anguli DHC, vel hujus ad duos rectos complementi ADH vel EDO, ad ſinum anguli DCH, vel anguli ADC, vel in quibuſdam caſibus hujus complementi ad duos rectos. Porro angulus EDO eſt radii ED angulus incidentiæ: ergo ut I ad R ita ſinus anguli incidentiæ radii ED ad ſinum anguli ADC. Quare (per *Prop. XI.*) DC eſt radio incidenti ED competens refractus: cumque ED aſſumptus ſit ad libitum, patet radiorum omnium ab E procedentium, poſt refractionem prædictam, focum eſſe C. q. e. i.

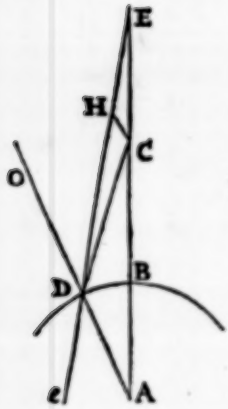
Si media propoſita ſint aer & vitrum, & radius ex aere incidat in vitrum (ut in quatuor primis figuris) facillime invenietur focus C: nempe ſi fiat pars tertia rectæ EA ad AB ſicut EC ad BC. Nam triplicando antecedentes, EA eſt ad AB (ſive AD) ut 3EC ad BC (ſive

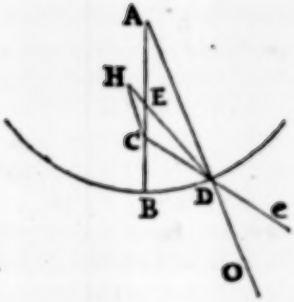

O
E
D
B
A
H
e
C

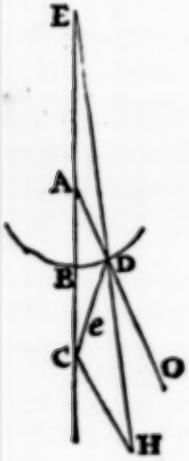

C
H
E
O
D
B
e
A


A
C
E
H
D
B
O
e

E
C
A
H
D
B
O
e


E
H
C
O
D
B
e
A


A
H
E
C
B
D
e
O


E
A
E
D
e
C
O
H

H
C
E
A
B
D
e
O

(ſive DC): ſed EA eſt ad AD ut ſinus anguli EDO ad ſinum anguli DEA, & 3EC eſt ad DC ut triplum ſinûs anguli EDC (vel HDC) ad ſinum anguli DEA: quare ſinus anguli EDO triplus eſt ſinûs anguli HDC, & conſequenter (in minimis hiſce angulis eandem cum ſuis ſinibus rationem habentibus) ſeſquialter ſinûs anguli ADC. Igitur DC (vel huic in directum De) eſt refractus radii ED ex aere in vitrum incidentis.

Ubi radius tranſit ex vitro in aerem (ut in quatuor figuris ultimis) focus, ex iiſdem principiis, invenietur, capiendo punctum C tale, ut ſemiſſis rectæ EA ſit ad AB ſicut EC ad BC.

Corol. 1.

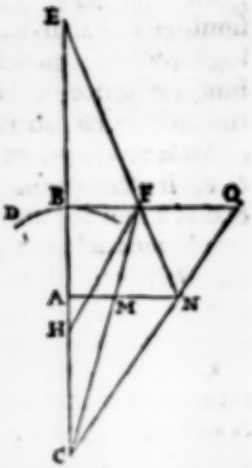
Ex hac *Prop.* & *XII.* & *Corol.* 1. *Prop. XI.* facile erit, ex dato foco radiorum convergentium, & incidentium in ſuperficiem Sphæricam medii diverſæ denſitatis, eorundem focum, poſt refractionem invenire.

Corol. 2.

Hinc ex datis focis E & C, & vertice B, invenietur centrum A, & inde ipſa Sphæra refringens: capiendo punctum A tale, ut EA ſit ad AC in ratione compoſita ex rationibus BE ad BC & I ad R. Vel ex datis focis & centro, invenietur vertex. Atque ſimile Problema de ſpeculis Sphæricis (per *Catoptricæ Prop. correſpondentes*) pari facilitate ſolvitur, & conſtructiones elegantiores Geometricæ inde deducuntur.

Corol. 3.

Conſtructio Geometrica *Probl. hujus X.* ex præmiſſis facilè deducitur. Reliquis ut priùs poſitis, per B & A ducantur parallelæ rectæ BQ, AN, rectæ EN ex E utcunque ductæ occurrentes in F & N. Fiat AN ad AM ut I ad R. Juncta recta FM producatur donec cum axe EA concurrat in C. Erit hic focus quæſitus.



Jungatur CN, rectæ BF occurrens ad Q; huic per F ducatur parallela FH, rectam EA ad H interſecans.

Eſt enim EA.EB::(EN.EF::EC.EH::EC—EA.EH—EB::)AC.BH. & permutando EA.AC::EB.BH. Igitur CB.BE, + EA.AC::(CB.EB, + EB.BH::BC.BH::BQ, BF::AN.AM::)I.R. Unde C eſt focus quæſitus.

Hæc eadem conſtructio inſervit (mutato tantum ordine punctorum E, B, A, C, M & N) ſi R excedat I, aut ſi radii ſint convergentes, aut paralleli, quo caſu vertitur in illam *Probl. IX.* aut cum ſuperficiei refringentis cavitas focum E reſpicit, aut cum BD plana eſt, quo caſu vertitur

vertitur in illam *Probl. VIII.* Nam cùm recta AMN (ut ſuperiùs diviſa) infinitè diſtat à BQ, recta FM eadem erit poſitione cum recta jungente punctum F cum puncto dividente BE ſimiliter ac AM diviſa eſt in N, poſitâ BE homologâ ipſi AM: quoniam angulorum tangentes ſunt reciprocè ut tangentes complementorum eorundem ad rectum.

Eodem modo, ex quatuor punctis A, B, C & E, ſi dentur alia quævis tria, ex. gr. E, B & C determinabitur quartum A; hoc eſt, Sphærica ſuperficies per datum punctum tranſiens deſcribetur, quæ focum E mutat in C, & viciſſim.

Scholium.

Cum nulla ſit Sphærois aut Conois ex rotatione ſectionis Conicæ circa axem genita, & ex diaphano diverſæ ab ambiente diaphano denſitatis conſtans, quæ poſſit radiorum datum focum, per refractionem ad unicam ſuperficiem, in alium datum exactè permutare: ſequitur proprietatem hanc, propoſitum quam proximè perficiendi, ideo ſuperficiei Sphæricæ convenire; quòd iſtius Sphæræ circulus maximus eandem etiam habet curvitatis rationem cum *Curvis Carteſianis* (*Lib. II. Geometriæ*) quarum rotatione fiunt ſuperficies, media diverſæ denſitatis dirimentes, quæ Problema exactè conficiunt. Quòd ſi circuli iſtius æqui-curvi, & focorum datorum ab eadem centri parte jacentium,

centium, ea ſit conditio, ut circuli ſemidiameter ſit media Geometrica inter diſtantias focorum à circuli centro, harumque diſtantiarum altera ſit ad ſemidiametrum in ratione, refractionem inter data media menſurante, Curva iſta *Carteſiana* in circuli peripheriam vertitur. In hoc focorum ſitu, Sphæra datæ denſitatis, ex rotatione circuli genita, radios à focorum uno procedentes ita refringet, ut omnes poſtea præciſè divergant ab altero.

Prop. XVI. Probl. XI.

DAto altero Lentis datæ foco, alterum invenire.

Lens eſt Corpus diaphanum, diverſæ ab ambiente diaphano denſitatis, duabus ſuperficiebus vel Sphæricis vel planâ & Sphæricâ terminatum. Recta ad utramque ejus ſuperficiem perpendicularis, dicitur *Axis* lentis. Puncta ubi axis interſecat ſuperficies, *Vertices* appellantur, & quidem vertex *Incidentiæ* aut *emerſionis*, prout in ſuperficie jacet in quam radii primò incidunt, vel ex qua denuo emergunt. *Craſſities* verò eſt diſtantia inter vertices.

Vocibus ita explicatis, Focus quæſitus ope calculi ex præmiſſis inſtituti (qui, in praxi, conſtructionibus quantumvis concinnis præferendus eſt) facilè determinatur, & Canones (memo-

(memoriâ ægrè tenendi & propterea omiſſi) ex calculo generali conduntur. Ut ſi ex dato foco ante incidentiam, quæratur focus poſt tranſitum: Inveniatur primò focus radiorum poſt refractionem ad lentis ſuperficiem in quam primò incidunt; atque hoc fit per *Prop. XIII.* ſi ſuperficies lentis ſit plana; ſi verò Sphærica ſit, adhibenda eſt *Prop. XIV.* ſi radii fuerint paralleli; ſed *XV.* ſi divergentes fuerint aut convergentes. Invento autem foco radiorum poſt refractionem ad primam hanc ſuperficiem, hoc eſt dum ii lentem tranſeunt, qui & *focus Tranſitûs* nuncupatur, pari modo invenietur illorum focus poſt refractionem ad ſecundam lentis ſuperficiem, ſive potius ad ſuperficiem ambientis medii, ſecundæ huic ſuperficiei contiguam; id eſt focus poſt emerſionem ex lente. q. e. f.

Quòd ſi plures fuerint Lentes, eodem modo procedendum eſt in ſingulis.

Similiter ex dato foco, ope unius vel plurium datarum Lentium facto, invenitur focus ante incidentiam, ſive ex data Machina Optica determinatur Viſibilis diſtantia.

Corol.

Si conſtructio Geometrica hujus Problematis deſideretur, ea nullo negotio ex *Corol.* 3. *Prop. præced.* deducitur, conſtructionem illic adhibitam pro una lentis ſuperficie, ad alteram repetendo. Nam ductis rectis EN, BF,

AN

AN & PM ex præſcripto iſtius Corol. patet rectam FM tendere ad focum tranſitûs radiorum quorum erat E focus ante incidentiam: Si ergo hæc occurrat parallelis rectis, per poſticæ ſuperficiei centrum *a*, & verticem emerſionis *b* ductis, in *n* & *f*, & capiatur *an* ad *am* ut I ad R in egreſſu è lente (hoc eſt ut R ad I ad ingreſſum in lentem) juncta *mf* axi B*b* occurrit in quæſito (poſt refractionem ad utramque lentis ſuperficiem) foco *e*. Rectæ enim *mf* eadem eſt conditio, ad emerſionem radiorum è lente, quæ fuerat ipſius MF ad eorum immerſionem.

Similiter ſi ſex punctorum A, B, E, *a*, *b*, *e*, alia quævis quinque dentur, determinabitur ſextum: Ex. gr. ex datis duobus focis, lentis craſſitie, & ſuperficie unâ, dabitur ejus ſuperficies altera.

Hæc eſt conſtructio quam, ab amico communicatam, ſine demonſtratione conſignavit *Barrovius* ad finem *Lect. XIV.*

Prop.

Prop. XVII. Theor. VI.

SI ſuperficies plana mittat radios in ſuperficiem quamlibet planam vel Sphæricam refringentem, erunt foci radiorum ſingulorum plani radiantis punctorum, poſt refractionem, in uno quàm proximè plano, radianti plano parallelo.

Superficies refringens quævis exponatur per BD cujus centrum A, & ſuperficies plana radians, per rectam EF. Ex A in EF demiſſa intelligatur normalis AE occurrens BD in B. Inveniatur C focus radiorum poſt refractionem, quorum erat E focus ante incidentiam, per quem ducatur planum CF plano FE parallelum. Dico focos radiorum à punctis ſingulis in plano EF procedentium (ſive plani EF imaginem principalem compoſitam ex imaginibus punctorum ſingulorum, dum oculus in axe radiationis cujuſque poſitus intelligitur: Nam de imagine ſecundaria, ab oculo ſitum datum obtinente viſa, qualem *Barrovius Lect.* 3. *ult.* conſiderat, hic non agimus) in plano CT collocari quam proximè. Ab F puncto ſumpto ad libitum in plano radiante, ad centrum A ducatur recta FA, ſuperficiei

ficiei refringenti occurens in D, & plano CT in T. Radii ED, erit DC refractus: Incidentis verò FB intelligatur BH refractus, rectæ DT occurrens in H. Quoniam angulus EAF ponitur parvus, arcus BD pro rectula habendus eſt, & circulus diametro BF per puncta D & E tranſibit, ob angulos BEF, BDF rectos. Unde anguli EBF, EDF (*ſcil.* anguli incidentiæ radiorum FB & ED) in eodem ſegmento, ſunt æ-

quales, quare & horum refracti ABH, ADC erunt etiam æquales. Igitur ob æquales angulos ad A, triangula BAH, DAC ſunt æquiangula, & BA ad AH ut DA ad AC, cumque BA, DA æquentur, erit AH æqualis AC: ſed ob angulum EAF vel TAC admodum parvum, AT fere æqualis AC, ergo AH, AT pro æqualibus habendæ ſunt: hoc eſt, focus radiantis puncti F, in plano CT quam proximè collocatur. Cumque F ſumptum ſit utcunque, idem de omnibus punctis plani EF verum eſt, eorum ſcil. focos eſſe in plano CT. Quod eâdem ratione in alio quovis caſu oſtenditur. q. e. d.

Corol.

Corol.

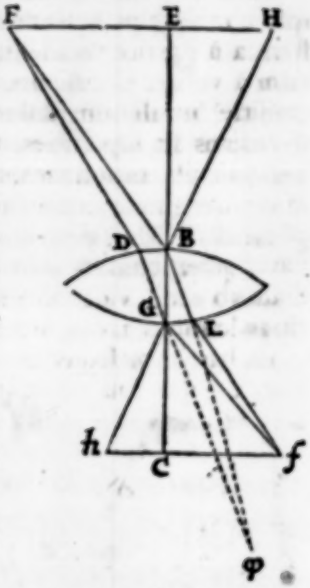
Hinc ſequitur imaginem plani radiantis EF, cui lentis axis perpendicularis eſt, eſſe etiam planum priori parallelum: Nam imago in plano CT conſtituta, intelligenda eſt ſuperficies plana mittens radios in ſecundam lentis ſuperficiem. Quòd ſi angulus EAF nimius ſit, ita ut AT multùm excedat AC nec illi æqualis cenſeri poſſit, tum facile eſt ad exemplum *Corol. Prop. VIII.* determinare an imago plani EF convexa an cava ſit futura. Erit ex. gr. verſus A cava, ſi BD ſuperficies refringens denſioris medii convexa fuerit, vel rarioris medii cava, & contra.

Prop. XVIII. Theor. VII.

IMago æquali angulo apparet ex vertice emerſionis lentis, ei quo viſibile ex vertice Incidentiæ.

Lentis axis GB productus intelligatur, normaliter inſiſtens plano viſibili FEH ad E, qui (per *Corol. Prop.* præced.) ad ejus imaginem *f* G *b* etiam perpendicularis eſt. Jungantur rectæ BF, BH, G*f*, G*b*. Dico angulos FBH, *f* G *b* eſſe æquales. Ex innumeris radiis ab F puncto procedentibus, & poſt refractionem ad lentem, rurſus ad hujus puncti imaginem *f* unitis, ſeligantur duo, quorum unus FA, lenti oc-

currit ad verticem incidentiæ B, ibique refractus, ad φ focum tranſitûs iſtius puncti tendit, & denuo ad L refractus dirigitur verſus *f*: alter verò FD refractus primò in D, rectà ad φ tendit, donec emergit ex lente ad verticem emerſionis G, ubi iterum refractus, ad *f* rectà pergit.



Radii DG incidentiæ angulus eſt DGB, & refractus CGF, radiique LB qui (per *Corol.* 1. *Theor. IV.*) refringeretur in BF, incidentiæ angulus eſt LBG, & refractus EBF. Quoniam rectæ φB, φG æquales cenſendæ ſunt (ob neglectam lentis craſſitiem BG) hiſce proportionales ſinus angulorum DGB, LBG, ipſique adeo anguli DGB, LBG, ac proinde horum refracti CGF, EBF æquales erunt. Eodem modo CG*h*, EBH æquantur: Ergo anguli FBH, *f*G*h* æquales ſunt, quod ſimiliter in alio quovis caſu oſtenditur. q. e. d.

Corol.

Corol.

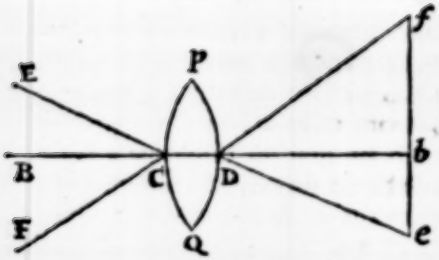
Hinc ſequitur lineam radiantem eſſe ad ipſius imaginem à lente factam, ut illius diſtantia à vertice incidentiæ, ad hujus diſtantiam à vertice emerſionis, vel (neglectâ lentis craſſitie) ut illarum diſtantiæ à lente. Quòd ſi radians ſit ſuperficies, ſaltem lineæ homologæ in illa ratione manebunt: hæc verò ad ipſius imaginem erit in prædicta ratione duplicata. Unde facile erit rationem determinare, quam viſibilis *imago ultima* (quæ immediate ab oculo videtur) mediante unâ vel pluribus lentibus facta, habet ad ipſum viſibile.

Ex hac *Prop.* ſequitur etiam lineam radiantem, ejuſque imaginem in eadem ratione ſecari ab axe lentis producto.

Prop. XIX. Probl. XII.

IMaginem Radiantis in axe lentis poſitione dati, à data lente factam, reſpectu oculi in lentis axe conſtituti determinare.

Proponatur lens PCQD, in cujus axe CD utcunque producto collocatum intelligatur Radians, ad cujus extrema puncta rectæ CE, CF tendunt. Radiorum à radiantis puncto in axe poſito procedentium, poſt refractionem ad utramque lentis ſuperficiem, focus



(per *Prop. XVI.* inventus) eſto *b*, per quem ducatur planum *e b f*, cui CD normalis eſt: ductis per D, rectis D*f*, *d e* ad CF & CE parallelis, patet (ex *Prop.* 2. præcedentibus) *f* eſſe imaginem puncti ad quod recta CF dirigitur, & *e* eſſe imaginem puncti ad quod CE producta pertingit. Unde patet, oculo ubivis in CD producta ultra *b* poſito, & radios à reſpectivis imaginis punctis divergentes excipienti, imaginem *f b e* videri. Advertendum tamen imaginis *f b e* punctum quodvis non in omnes partes, & undequaque radios emittere, ſed cujuſvis puncti radios conum conſtituere, ad verticem illi cujus vertex eſt prædictum punctum, baſis vero eſt lens radios refringens: Unde ex dato oculi ſitu, & pupillæ diametro, dignoſcetur num oculus dati puncti radios excipiat, hoc eſt num punctum illud videre poſſit. Quæ conſideratio, in viſione imaginum à ſpeculo factarum, locum etiam obtinet.

Exempli

Exempli gratia, ſi radians ſit longinquum, & ſuperficies PCQ plana, PDQ vitrea convexa, circumfuſo aere, erit (per *Corol.* 3. *Prop. XIV.*) D*b* æqualis diametro Sphæræ PDQ: nam radii ad BC paralleli, ſuperficiem planam PCQ in quam normaliter incidunt, irrefracti tranſeunt; & imago reſpectu radiantis everſa eſt.

Quòd ſi PCQ ſit convexa, & PDQ plana, erit (per *Corol.* 1. *Prop. XIII.* & *Corol.* 1. *Prop. XIV.*) C*b* æqualis Sphæræ PCQ diametro auctæ triente craſſitiei lentis CD. Neglectâ verò lentis craſſitie, ut fieri ſolet in Teleſcopii lente objectiva, erit ut priùs, diſtantia imaginis viſibilis longinqui à lente plano-convexa, diametro Sphæræ æqualis.

Sin lens plano-convexa PQ ſit aquea, D*b* erit diametri ſeſquialtera, per *Prop. XIV.*

Si lens vitrea PQ ſit æqualiter utrinque convexa, neglectâ craſſitie, erit (per *Corol.* 1. *Prop. XIV.* & *Prop. XV.*) D*b* ſemidiametro utriuſvis Sphæræ æqualis. In Sphæra integra vitrea, imago radiantis longinqui, poſt Sphæram quadrante diametri diſtabit: nam in hoc caſu craſſities lentis negligi nequit; in aquea, ſemidiametrum adæquat hæc diſtantia.

In omnibus hiſce caſibus vel ſimilibus, ſi Sol ſit radians iſtud longinquum, & lens ſit Solis imagine notabiliter latior, in loco imaginis excitabitur combuſtio, eaque vehementior

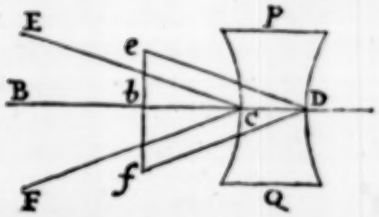
tior quam à ſpeculo cavo, ſi imago Solis æqualiter diſtet à lente & ſpeculo æqualiter latis, propter majorem radiorum jacturam ad hoc quam ad illam. Si in loco prædicto ponatur Corpus lucidum, hujus imago longinqua, remota illuſtrabit.

Si radians non ſit longinquum ut priùs, attamen à lente remotius quam eſt locus imaginis longinqui ex adverſo radiantis; præter ſymptomata modo explicata, quòd nempe imago everſa ſit &c. ſi radians ad lentem accedat, recedet imago, & è contra; donec radiante in loco imaginis radiantis longinqui exiſtente, imago fiat longinqua. Quæ omnia obſervare licet in camera inſtructa lente convexâ, cætera obſcura, in quam radiantia variè diſtantia radios mittant. Locus imaginis cujuſque radiantis dignoſcitur, cùm in plano impolito & albo in camera poſito, radiantis imago diſtinctiſſimè pingitur. Neque opus eſt plura de hoc experimento nunc vulgatiſſimo ſubjungere, aut altero iiſdem principiis Opticis innixo, quo tabellæ pellucidis coloribus in vitro pictæ, & flammæ radios confertos tranſmittentis, imago in plano impolito & albo depicta repræſentatur.

Si radians lenti convexæ propinquius ſit quam eſt imago radiantis longinqui, tum illius imago non ab altera ſed ab eadem lentis parte efformabitur, & ejus locus ad modum ſuperio-

ſuperiorum, ex dato radiantis loco determinabitur: Imago hæc eſt ſemper erecta, & radiante major: accedente radiante ad lentem, accedit & imago, ſimul etiam à lente recedunt; imago tamen velociùs.

Mutatâ lente convexâ in cavam, eadem conſtructio manet, & ſubducto calculo (per *Corollaria Prop.* 14.) invenietur radiantis longin-



qui imaginem *e b f*, à plano-concava lente PQ factam, erectam eſſe, & verſus eaſdem partes cum radiante à vertice D, diametro Sphæræ PDQ diſtare. Si jam ſuperficies PCQ ſit etiam Sphærica, & radians de longinquo propinquum fiat, eâdem conſtructione determinabitur ejus imago, ſi per *Prop. XV.* inveniatur imago puncti radiantis in axe lentis poſiti. In qua, præter modò dicta, illud eſt obſervandum, quod ſimul cum radiante ad lentem accedit vel ab illa recedit, tardiùs tamen, ut calculum ineunti patebit.

Concipiantur cujuſvis radiantis radii ita inflexi, ut imaginem *e b f* facturi ſint ſi non impe-

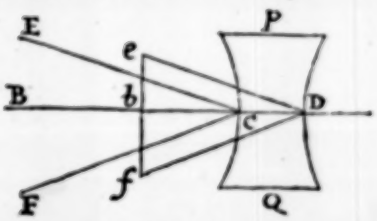
tior quam à ſpeculo cavo, ſi imago Solis æqualiter diſtet à lente & ſpeculo æqualiter latis, propter majorem radiorum jacturam ad hoc quam ad illam. Si in loco prædicto ponatur Corpus lucidum, hujus imago longinqua, remota illuſtrabit.

Si radians non ſit longinquum ut priùs, attamen à lente remotius quam eſt locus imaginis longinqui ex adverſo radiantis; præter ſymptomata modo explicata, quòd nempe imago everſa ſit &c. ſi radians ad lentem accedat, recedet imago, & è contra; donec radiante in loco imaginis radiantis longinqui exiſtente, imago fiat longinqua. Quæ omnia obſervare licet in camera inſtructa lente convexâ, cætera obſcura, in quam radiantia variè diſtantia radios mittant. Locus imaginis cujuſque radiantis dignoſcitur, cùm in plano impolito & albo in camera poſito, radiantis imago diſtinctiſſimè pingitur. Neque opus eſt plura de hoc experimento nunc vulgatiſſimo ſubjungere, aut altero iiſdem principiis Opticis innixo, quo tabellæ pellucidis coloribus in vitro pictæ, & flammæ radios confertos tranſmittentis, imago in plano impolito & albo depicta repræſentatur.

Si radians lenti convexæ propinquius ſit quam eſt imago radiantis longinqui, tum illius imago non ab altera ſed ab eadem lentis parte efformabitur, & ejus locus ad modum ſuperio-

ſuperiorum, ex dato radiantis loco determinabitur: Imago hæc eſt ſemper erecta, & radiante major: accedente radiante ad lentem, accedit & imago, ſimul etiam à lente recedunt; imago tamen velociùs.

Mutatâ lente convexâ in cavam, eadem conſtructio manet, & ſubducto calculo (per *Corollaria Prop.* 14.) invenietur radiantis longin-



qui imaginem *e b f*, à plano-concava lente P Q factam, erectam eſſe, & verſus eaſdem partes cum radiante à vertice D, diametro Sphæræ P D Q diſtare. Si jam ſuperficies P C Q ſit etiam Sphærica, & radians de longinquo propinquum fiat, eâdem conſtructione determinabitur ejus imago, ſi per *Prop. XV.* inveniatur imago puncti radiantis in axe lentis poſiti. In qua, præter modò dicta, illud eſt obſervandum, quod ſimul cum radiante ad lentem accedit vel ab illa recedit, tardiùs tamen, ut calculum ineunti patebit.

Concipiantur cujuſvis radiantis radii ita inflexi, ut imaginem *e b f* facturi ſint ſi non impe-

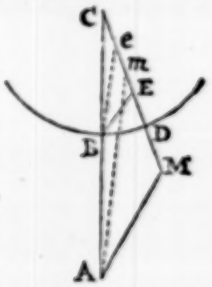
impediantur, ſed à lente plano-concava PQ intercipi; in cujus ſuperficiem cavam PDQ, diametro rectæ D*b* æquali deſcriptam, priùs incidunt: eadem conſtructio quæ prius, imaginem factam poſt refractionem horum radiorum ad dictam lentem determinat. Nam (per *Corol.* 4. *Prop. XV.*) radii ad *b* convergentes, ita refringuntur à concavo vitro, ut axi DB paralleli evadant, hoc eſt imaginem longinquam conſtituant, ad cujus extrema puncta (per *Theor.* præced.) rectæ poſitione datæ EC, FC vel *e*D, *f*D diriguntur, quæque proinde datur poſitione. Circa hanc præcipuè notandum, quòd oculo circa B poſito, imago longinqua videatur everſa, reſpectu imaginis quæ ad *ebf* facta fuiſſet abſque interventu lentis. Ad horum exemplum, in quovis caſu procedere licet. q. e. f.

Prop. XX. Probl. XIII.

RAdiantis poſitionem reſpectu lentis datæ eam invenire, ut imago à lente facta, ſit æqualis datæ figuræ, quæ eſt radianti ſimilis: vel quod eodem redit, ut radians ad ipſius imaginem à lente factam, datam habeat rationem.

Detur

Detur lens vitrea ex. gr. Anterioris ſuperficiei ſemidiameter ſit AB, poſterioris verò ſemidiameter CB. Ducatur CM, angulum utcunque cum CA continens. Detur ratio MD ad DC, illa nempe quam radiantis & imaginis lineæ homologæ habere debent. Jungatur AM, cui per B ducatur parallela BE, rectæ CM occurrens in E; erit dupla ME, quæſita radiantis diſtantia à lente. Si capiatur D*m*, in eadem recta ſed ab altera parte puncti D, æqualis rectæ DM, & jungatur A*m*; huic parallela B*e* abſcindet aliam *me* etiam Problemati ſatisfacientem: Radians quippe quod dupla longitudine *me* à lente diſtat, eſt ad ſuam imaginem (ſed ad contrarias lentis partes à priore poſitam) ut DM ad DC.



Per *Corol. Prop. XVIII.* linea radians eſt ad ipſius imaginem à lente factam, ut illarum diſtantiæ à lente: Sed ſi dupla ME vel dupla *me* ſit diſtantia puncti radiantis à lente, diſtantia imaginis iſtius puncti ab eadem, erit ad priorem diſtantiam reſpectivè, ut MD ad DC: ut calculum ineunti, per *Prop. XV.* ſatis patet. Nam ſi AB vocetur *a*, BC *b*, craſſities lentis C, MD *r*, & Z diſtantia quæſita radian-

tis à lente vitrea cui aer circumfunditur: erit $zz = \frac{6abz - 2aez \mp 6arz \pm 2crz \mp 4acr}{3a - c + 3b}$.

Si negligatur lentis craſſities (quòd in Problematis conſtructione factum) erit diſtantia quæſita radiantis à lente æqualis $\frac{2ab \mp 2ar}{a + b}$.

In Schemate adſcripto, lens ab utrâque parte convexa ſtatuitur; ſed cuivis lenti eadem conſtructio inſervit, cum ex lentium varietate, ordo tantùm punctorum A, B & C mutetur. Alia Problematis hujus conſtructio facilè deducitur ex *Corol. Prop. XVI.*

Prop. XXI. Probl. XIV.

EX datis duabus lentibus vel ſpeculis Sphæricis, vel lente & ſpeculo, Machinam Opticam fabricare, quæ oculo ad diſtantiam datam videnti, repræſentet viſibile propinquum datum, ſub angulo dato diſtinctum, aſſignatâ etiam oculi à lente vel ſpeculo ultimo diſtantiâ.

Cum oculus Machina ſit huic deſtinata, ut exteriùs radiantium imagines diſtinctæ in oculi fundo (in hunc finem Sphæroidice excavato

ut

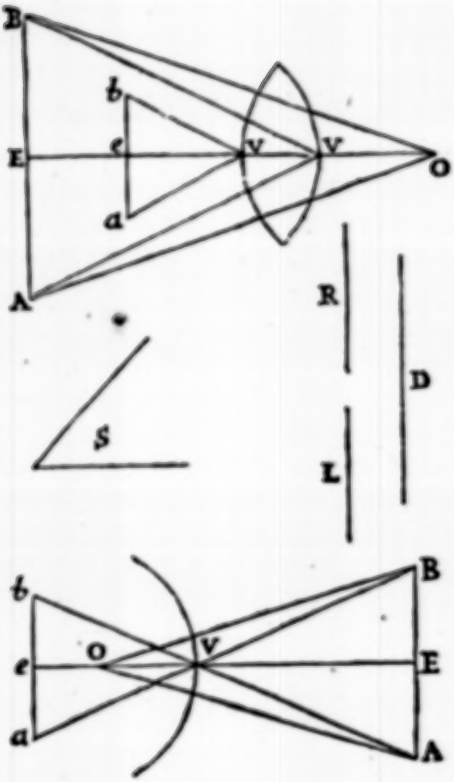
ut ex *Corol. Theor. VI.* oportuit) depingantur, omni reliquo apparatu, ad ejus motum vel tutamen ſingulis videntibus neceſſarium, ſolummodo conducente; Patet datum oculum in data tantum à viſibili diſtantia diſtinctè videre. Si nunc oculus pro arbitrio poſſet ſe ſiſtere ad diſtantiam à quolibet viſibili, ad viſionem diſtinctam neceſſariam (reliquis, ut gradu illuſtrationis &c. rectè ſe habentibus) ſemper fieret viſio diſtincta. Et quamvis nullus detur oculus tam rigidus, ut ad diſtantiam determinatam tantùm videat, ſed, pro flexibilitate & mobilitate partium quâ quiſque oculus pollet, poſſit ad viſibilia in diverſis diſtantiis poſita ſe applicare, & pro diſtantia data, figuram ſuam mutare; ut non amplius idem datus oculus, ſed pro re nata varius & mutabilis habendus ſit: cùm tamen mobilitas hæc intra certos limites contineatur, plurimaque ſint viſibilia ad quæ pro lubitu, etiam intra dictos limites, accedere non licet; Patet opus eſſe Machinâ Opticâ ut illa diſtinctè videat. Quælibet vero lens vel ſpeculum Sphæricum huic ſufficit; cùm ejus ope, radiantis cujuſvis (ad quod pro lubitu accedere non licet) imago prope nos ſiſti poſſit (ut ex ſupra demonſtratis conſtat) quam poſtea intueri licebit, cùm oculum in noſtra vicinia, pro arbitrio, mobilem ſupponamus.

Verùm quia præter viſionem diſtinctam, in

uſus humanos quandoque requiritur, ut viſibilis partes minutiores cernantur; & experientiâ compertum ſit, viſibile quod ſub angulo minore quam unius ſcrupuli primi apparet, tanquam punctum à vidente conſiderari, & ejus partes minimè ab invicem diſtingui: ſæpenumero ſit, ut cùm radians oculo tam prope admovetur, ut particulæ conſiderandæ ſub angulo, majore ſupradicto, ſive ſenſibili conſpiciantur, ipſum radians oculo nimis ſit propinquum, neque intra limites diſtinctæ viſioni requiſitos conſiſtat. Huic incommodo, ſi unicum ſit, ope datæ cujuſvis lentis vel ſpeculi remedium adfertur per *Propoſitionem X.* vel *XX.* ubi viſibilis imago per datum ſpeculum vel lentem, in data quavis menſura repræſentatur.

Quòd ſi duo prædicta incommoda ſimul urgeant, duabus lentibus vel ſpeculis, vel lente & ſpeculo, ad illa depellenda opus erit. Oſtenſis ergo quæ unicâ datâ lente vel ſpeculo in viſus adjumentum fieri poſſunt, ad Machinas ex binis junctis conſtantes progredimur; ſive ad univerſale hocce quod propoſitum eſt Problema conſtruendum.

Sit viſibile datum R, datus angulus in quo repræſentari debet S, viſûs diſtantia data D, dataque diſtantia oculi à lente L. Fiat triangulum AOB, in quo angulus verticis O æqualis eſt dato S, & OE perpendicularis à vertice in baſim,


B
b
E
c
V
V
O
a
A
R
D
S
L
b
B
O
V
e
E
a
A

baſim, æqualis datæ D. Si viſibilis punctum medium in axe lentis vel ſpeculi poſitum volumus, quod in praxi convenit, fiat triangulum AOB iſoſceles. Capiatur OV æqualis L. Ad V conſtituatur quælibet ex lentibus vel ſpeculis, axem in recta OE habens.

Per *Propoſitionem VI.* vel *XVI.* dato lentis vel ſpeculi focorum uno E, inveniatur alter *e*; hoc eſt, ut radiorum quorum *e* focus ante incidentiam, E ſit focus poſt inflectionem ad lentem vel ſpeculum. Per *e* ducatur recta *aeb* parallela rectæ AEB, occurrens rectis V*a*, V*b* per V ductis & ad rectas VA, VB parallelis, in *a* & *b*.

Patet ex *Prop. IX.* vel *XIX.* ſi *aeb* ſit radians, AEB fore ejus imaginem: Quare ſi viſibilis vicini dati R, & alterius lentis vel ſpeculi, talis ponatur ſitus (per *Prop. X.* vel *XX.*) ut viſibilis R, imago à lente vel ſpeculo facta, ſitum & magnitudinem *aeb* obtineat; Conſtructum erit Microſcopium quæſitum. Nam viſibilis R, *aeb* eſt imago, cujus imaginis imago, ab oculo in O poſito viſa, eſt AEB: Hæc autem apparet ſub angulo AOB æquali dato S, & in diſtantia OE, datæ D æquali, ac proinde diſtincta; oculique diſtantia à lente vel ſpeculo ultimo in V, eſt æqualis datæ L. q. e. f.

Si oculus datus ſit Presbytæ, reliquis manentibus, recta OE evadit infinita, & punctum *e* invenitur per *Prop. III.* vel *XIV.*

Si

Si viſibile propoſitum ſit longinquum, Problema eſt impoſſibile. Verùm ſi angulus S non detur, Teleſcopium ex reliquis datis ſic conſtruitur. In recta poſitione data, verſus propoſitum viſibile longinquum porrecta, ab O prorſum ſumantur OF, OV, ipſis D & L æquales: in V ſtatuatur ſpeculorum vel lentium una, axem in VE habens. Per *Prop. VI.* vel *XVI.* dato ipſius V focorum uno E, inveniatur alter *e*, quo nempe exiſtente foco radiorum ante inflectionem ad V, ſit E focus poſt illam. In recta OE ita collocetur lentium vel ſpeculorum datorum alterum, axem in eadem habens, ut viſibilis longinqui imago ab ipſo efformata, in recta *a e b* ad OE normali conſiſtat, & conſtructum erit Teleſcopium quæſitum. Nam viſibilis longinqui imago prima eſt in *a e b*: hujus verò imaginis imago eſt, ex conſtructione, in AEB cujus diſtantia ab O, eſt rectæ OE ſive datæ D æqualis, ac proinde oculo diſtincta: & ipſius oculi diſtantia ab V datæ L æquatur. Dato verò viſibili longinquo, datur (per *Prop. XIX.*) ejus imago à dato ſpeculo vel lente facta; hujuſque imaginis imago à dato V efformata; ac proinde angulus in quo ultima hæc ab oculo poſitione dato videtur.

Quòd ſi O ſit oculus presbytæ, angulus AOB, propter AB in hoc caſu longinquam, æqualis eſt AVB ſive *a* V *b*. Igitur anguli, in quibus viſibile longinquum cum & ſine Machina appa-

ret,

ret, ſunt ut diſtantiæ ſpeculorum vel lentium à communi foco *e*: Nam parvi anguli ſunt ferè ut ipſorum co-tangentes.

Scholium.

Commodiſſimum erit lentem vel ſpeculum perfectius adhibere ad *objecti* radios immediatè excipiendos, ejuſque imaginem primam efformandam (quod idcirco *objectivum* dicitur) Nam lentis vel ſpeculi errores aut defectus, imaginem à ſe factam afficiunt; cumque hæc imago partes agat viſibilis, per ſpeculum vel lentem v (oculo proximam, ac proinde *ocularem* dictam) inſpiciendi: illius defectus, hoc eſt, defectus vel errores lentis vel ſpeculi objectivi cujus ope efformata eſt, majores magiſve ſenſibiles erunt, quo major fuerit imago AEB quam imago *aeb*: hoc eſt, quo (manente objectivo) Machina fuerit perfectior. Errores autem lentis vel ſpeculi ocularis v, æquè ſenſibiles erunt, quæcunque tandem ſit imago *aeb*, aut lens ſpeculumve objectivum à quo producitur: hoc eſt, manente ocularis v, ejus defectus æqualiter apparent & æquè deteguntur, quemcunque perfectionis gradum Machina aſſecuta fuerit, ex mutata lente objectiva vel ſpeculo objectivo imaginem *aeb* efformante: nam, dato oculo, data lens ocularis vel ſpeculum v, æqualiter ab imagine *aeb*, viſibilis vices obeunte, ejuſque imagine AEB diſtat, ac proinde ſuos defectus æqualiter prodit.

Prop.

Prop. XXII. Probl. XV.

EX datis tribus vel pluribus lentibus vel ſpeculis Sphæricis, Machinam Opticam conſtruere, quæ oculo dato repræſentet propoſitum viſibile longinquum, in dato angulo viſorio diſtinctum, aſſignatâ oculi à lente vel ſpeculo ultimo diſtantiâ.

Ope cujuſvis ex ſpeculis vel lentibus datis, fiat viſibilis longinqui imago, & ex duobus reliquis fiat, per præcedentem, Microſcopium, illam (quippe radians vicinum datum) repræſentans in conditionibus propoſitis; factumque erit quod quæritur Teleſcopium.

Similiter ex lentibus vel ſpeculis hiſce fiet Microſcopium, & addendo quartum, fiet rurſus Teleſcopium: in quibus omnibus innoteſcit ratio quam imago ab oculo viſa habet ad viſibile, vel quam angulus in quo illa videtur, ad angulum in quo hoc ſine Machina apparet: & conſequenter Machinæ vires in viſu promovendo, per *Corol. Prop. IX.* & *XVIII.* æſtimantur.

Prop. XXIII. Probl. XVI.

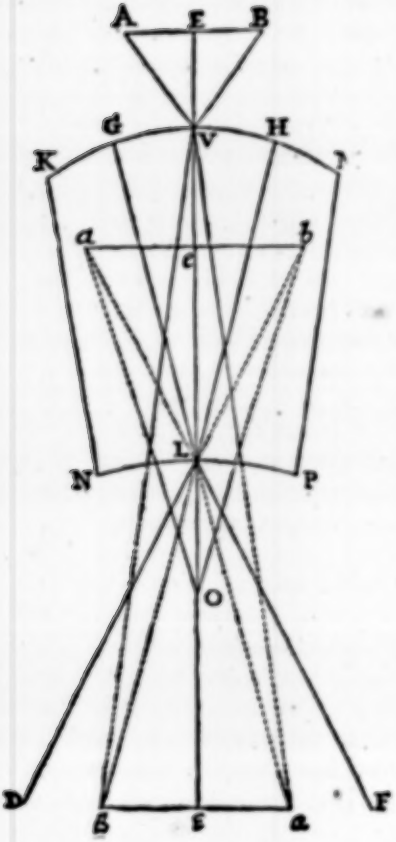
LEntem vitream Sphæricam datæ craſſitiei conſtruere, cujus ope, oculo ad datam diſtantiam videnti, repræſentetur datum viſibile ad datam diſtantiam à lente poſitum, in angulo dato diſtinctum, aſſignatâ etiam oculi à lente diſtantiâ.

Hactenus quid per lentes vel ſpecula data, vel ea quomodocunque combinata vel juncta præſtari poſſit, ad viſus defectus ſupplendos, oſtendimus, ſupereſt ut lentem ad uſus datos aptam conſtruamus.

Viſibilis linea A B cujus diſtantia à lente V E, repræſentanda eſt in angulo viſorio *a o b*, diſtincta oculo ad diſtantiam *o e* videnti. In trianguli iſoſcelis *a o b* (cujus baſis *a b*, altitudo *e o*) perpendiculari *o e* (ita poſitâ, ut lineam viſibilem A B bifariam & normaliter ſecet in E) ſumatur O L æqualis diſtantiæ datæ oculi à lente. Ducantur *a* L, *b* L, & producantur in D & F. Ponatur L V datæ lentis craſſitiei æqualis. Radiis in aere A V, B V, D L, F L, ducantur correſpondentes in vitro refracti V *α*, V *β*, L H, L G, ex data poſitione recta V L, vitro ad incidentiæ puncta normali. Producantur

tur rectæ H L, G L, donec cum rectis V β, V α concurrant in β & α. Juncta recta α β, perpendicularem e O normaliter in ε ſecabit, quia tam anguli incidentiæ quam refracti ſunt ab utroque, rectæ O e, latere æquales. Ex datis focis E & ε, & vertice V, inveniatur (per *Corol.* 2. *Prop. XV.*) Sphæra vitrea K V M quæ radios in aere divergentes ab E, ita refringat ut ad focum ε convergant. Per prædictum *Corol.* inveniatur etiam N L P ſuperficies Sphæræ aereæ per L tranſiens, quæ radios in vitro ad focum ε convergentes refringat, ita ut ab e poſtea divergant; Figura ſolida M K N P, ex vitro conſtans, ſuperficiebus Sphæricis K V M, N L P, & conicâ cujus axis V L terminata, eſt Lens quæſita: Ubi cavendum ne portiones V K, L N ſint nimis magnæ, cùm demonſtrationes præcedentes omnes, de radiis tantùm prope verticem incidentibus procedant.

Ex conſtructione, radii ab E divergentes, poſt refractionem ad anteriorem ſuperficiem K V M, ad focum ε convergunt: quare (per *Prop. XVII.*) imago rectæ radiantis A B (refractione ad K V M facta) eſt in poſitione data recta α β: ſed radius A V, per conſtructionem, refractus ad ſuperficiem K V M, ad punctum α pertingit: ergo iſtud α punctum eſt imago puncti A, quæ à ſola anteriori ſuperficie producitur. Similiter β eſt imago puncti B, & recta α ε β imago radiantis rectæ A E B. Porro

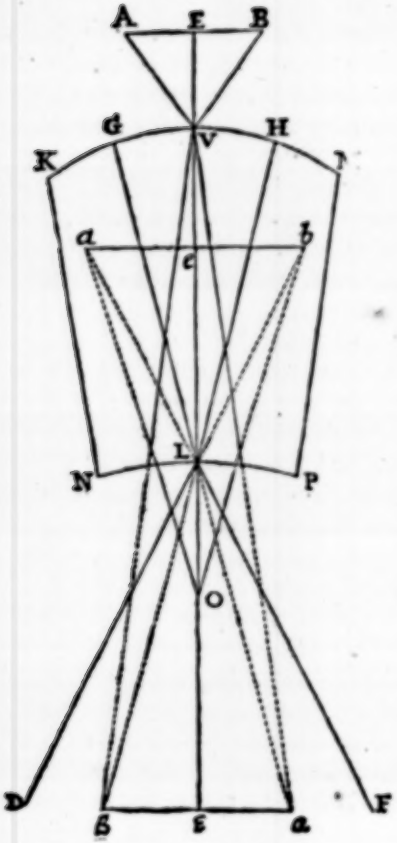

A
E
B
G
V
H
K
I
a
b
c
L
N
P
O
D
F
G
E
a

(ex conſtructione) radii qui intra lentem ad ε convergunt, ad ſuperficiem NLP refracti, ab *e* divergunt; quare (per *Prop. XVII.*) radiantis futuri *α ε β* imago, refractione ad ſuperficiem NLP facta, eſt in plano *aeb*: Sed radii GL intra lentem ad *α* rectà procedentis refractus LF ab *α* procedit; unde imaginis in *α* futuræ imago, poſt refractionem ad NLP, eſt *α*: Similiterque radii qui intra lentem ad *β* convergunt, refractione ad NLP à *b* divergunt, hoc eſt, radiantis AEB, diſtantiâ datâ VE à lente remoti, imago à lente NKMP facta eſt *aeb*, quæ diſtincta eſt oculo dato in O; quoniam in data diſtantia O*e* oculo debita ponitur: ſed & in angulo dato *aOb* videtur ab oculo O, diſtantiâ datâ OL, â lente remoto, & lentis craſſities VL æqualis eſt datæ rectæ. q. e. f.

Eadem conſtructio inſervit, ſi oculus preſbytæ detur: in eo enim caſu, *aeb* infinitè diſtat, & rectæ quæ prius erant *α* L, *b* L, ducendæ ſunt per L, poſitione datis O*α*, O*b* parallelæ, & centrum ſuperficiei NLP (per *Corol. 6. Prop. XIV.*) triente rectæ L ε ab L diſtabit.

Quòd ſi viſibile propoſitum longinquum ſit, conſtructio adhuc ſimplicior evadet: centrum enim ſuperficiei anterioris KVM (per *Corol. 1. Prop. XIV.*) triente rectæ V ε à vertice V diſtabit.

Prop.


A
E
B
G
V
H
K
I
a
c
b
L
N
P
O
D
β
ε
α
F

(ex conſtructione) radii qui intra lentem ad ε convergunt, ad ſuperficiem NLP refracti, ab *e* divergunt; quare (per *Prop. XVII.*) radiantis futuri αεβ imago, refractione ad ſuperficiem NLP facta, eſt in plano *aeb*: Sed radii GL intra lentem ad α rectà procedentis refractus LF ab *a* procedit; unde imaginis in α futuræ imago, poſt refractionem ad NLP, eſt *a*: Similiterque radii qui intra lentem ad β convergunt, refractione ad NLP à *b* divergunt, hoc eſt, radiantis AEB, diſtantiâ datâ VE à lente remoti, imago à lente NKMP facta eſt *aeb*, quæ diſtincta eſt oculo dato in O; quoniam in data diſtantia O*e* oculo debita ponitur: ſed & in angulo dato *aob* videtur ab oculo O, diſtantiâ datâ OL, â lente remoto, & lentis craſſities VL æqualis eſt datæ rectæ. q. e. f.

Eadem conſtructio inſervit, ſi oculus preſbytæ detur: in eo enim caſu, *aeb* infinitè diſtat, & rectæ quæ prius erant *a*L, *b*L, ducendæ ſunt per L, poſitione datis O*a*, O*b* parallelæ, & centrum ſuperficiei NLP (per *Corol. 6. Prop. XIV.*) triente rectæ Lε ab L diſtabit.

Quòd ſi viſibile propoſitum longinquum ſit, conſtructio adhuc ſimplicior evadet: centrum enim ſuperficiei anterioris KVM (per *Corol.* 1. *Prop. XIV.*) triente rectæ Vε à vertice V diſtabit.

Prop.

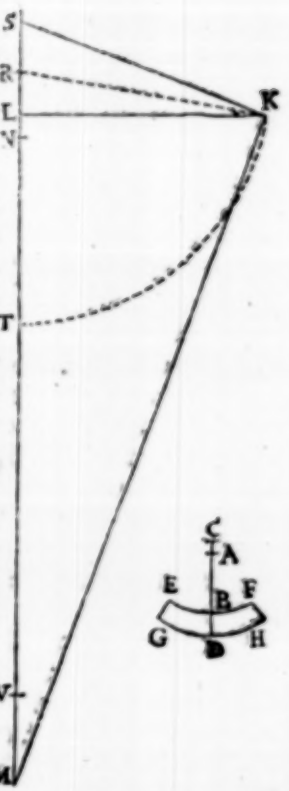
Prop. XXIV. Probl. XVII.

SPeculum Sphæricum concavum datæ craſſitiei ex vitro conſtruere, cujus concavitatis diameter data eſt, ut radii axi paralleli, ab utraque ſuperficie reflexi, in idem axis punctum congregentur.

Quoniam experientiâ compertum eſt ſpecula metallica neque tam facilè figuram aptam & politam induere, neque illam tam diu conſervare, ex vitro efficta adhibere conveniet. Detur igitur ſuperficiei vitreæ concavæ EBF vertex B, centrum A, detur item craſſities lentis BD; invenienda eſt ſuperficiei GDH ſemidiameter DC, ut radiorum ad AB parallelorum, & in ſpeculum cavum incidentium, tam hi qui à ſuperficie EBF reflectuntur, quam illi qui ad prædictam ſuperficiem GDH, ad ingreſſum & egreſſum bis refracti, à ſuperficie verò cava GDH reflexi, concurrant in eodem axis AB puncto: vel quod eodem redit, ſpeculum ex vitro tale conſtruendum eſt, ut radiantis longinqui imagines binæ, à binis ſuperficiebus effictæ coincidant, adeoque optimum ſit vel ad comburendum, vel ad longinquorum imagines efformandas.

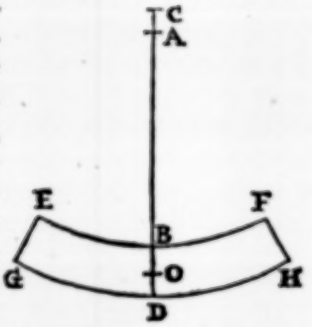
Ab

Ab infinitæ rectæ SM puncto quovis L, ab unâ parte capiatur LN æqualis BD, ab alterâ verò LR ejus dupla, capiatur item ab N prorſum recta NT rectæ AB tripla, & TV rectæ NT dupla, item VM rectæ RL etiam dupla. Centro R, diſtantiâ RT deſcribatur circulus, perpendiculari ad L erectæ occurrens in K: junctæ MK, ſit KS normalis, infinitæ primò ductæ occurrens in S. In recta DA à D verſus A, capiatur DC, rectæ LS æqualis; centro C, diſtantia DC deſcribatur circuli arcus DG, arcui BE centro A deſcripto ſimilis, & jungatur EG. Figura ſolida ex rotatione planæ figuræ BDGE circa manentem rectam BD genita, & ex vitro conſtans, eſt ſpeculum quæſitum. q. e. f.



Verùm

Verùm ſi AB ſit ſatis magna reſpectu craſſitiei BD, Problema expeditiſſimè ſic conſtruitur. Dividatur BD in O, ita ut majus ſegmentum BO, ſit minoris OD ſeſquiquartum; producatur BA ad C, ut CA ſit æqualis OD; eritque C quam proximè centrum ſuperficiei exterioris GDH. q. e. i.



Utriuſque hujus conſtructionis demonſtrationem omittimus, cùm facillimè fluat ex ſequente calculo analytico per *Propoſitiones V. XIV.* & *XV.* inſtituto: Nam ſi $AB = a$, $BD = c$, erit $DC = \frac{9a^2 + 18ac + 5c^2}{9a + 5c}$. Similiter conſtruetur ſpeculum, ſi radiantis alia quævis ſit poſitio.

Conſtitueram calculum univerſalem præcedentibus ſubjunxiſſe pro inventione focorum in quovis ſpeculo vel lente: Verùm illud pro lentibus abundè factum eſt à Clariſſ. *Halleio* Tranſact. Philoſ. Menſ. Nov. An. 1693, & ad caſus particulares, eleganter applicatum.

Scho-

Scholium.

Hucuſque oſtenſum eſt quid Emolumenti ex Sphæricis Lentibus vel Speculis, ad Machinarum conſtructionem debeat ſperari: Verùm diverſa radiorum lucis refrangibilitas eaque in datis radiis data, immutabilis, & cum certis coloribus connexa, ab optimo Philoſopho *Iſaaco Newtono* detecta, rationes Dioptricas prorſus turbat, ut nihil accuratiſſimum à lentibus (etiamſi Conoideon quarumvis figuras induerent) ſperari poſſit. Quoniam verò lex Catoptricæ de æqualitate angulorum incidentiæ & reflectionis, in radiis utcunque heterogeneis (obſervante eodem accuratiſſimo viro) inviolabilis manet; præſtat ſpeculum adhibere loco lentis objectivæ, quæ viſibilis longinqui imaginem ad diſtantiam ſatis magnam efformans, errores à diverſa radiorum refrangibilitate ortos, ſenſibiles admodum & minimè diſſimulandos prodit, ſi in apertura ſatis magna, ſæpenumero neceſſaria, radii obliquiùs incidentes admittantur: In minoribus verò lentibus, quales ſunt oculares, error tam parvus & inſenſibilis eſt, ut illis tutò uti liceat.

Hujuſmodi *Teleſcopii Cata-Dioptrici*, ex ſpeculis & lentibus conſtantis, Specimen primus edidit *Jacobus Gregorius Prop. 59. Opticæ Promotæ*, à *D. Caſſegrain Gallo* pro ſuo poſt multos annos venditatum. Illud in melius, ob ra-

tiones tam Phyſicas quam Geometricas, immutatum & fabricatum, poſt editam ſuam *Lucis & Colorum Theoriam* admirandam, publici juris fecit D. *Newtonus*.

Cùm ſpecula, utpote Corpora opaca, circa eundem cum lentibus axem conſiſtere nequeant, abſque perforatione ſpeculorum ad verticem, & radiorum prope eundem incidentium, & accuratiſſimè reflexorum irreparabili jacturâ, ex duabus hiſce cauſis ortâ: licebit axis poſitionem pro arbitrio mutare (per *Corol.* 1. *Prop. II.*) ope ſpeculi plani; atque hoc modo (præter alia commoda quibus hic proſpicitur) perforationis neceſſitatem prorſus tollere, jacturam verò radiorum prope axem incidentium ab opacitate ortam, per ſecundi ſpeculi obliquitatem multùm diminuere, quod à perſpicaciſſimo *Newtono* in ſuo Teleſcopio Cata-Dioptrico factum eſt. Quòd ſi ob difficultates Phyſicas, in ſpeculis idoneis torno elaborandis & poliendis, etiamnum lentibus uti oporteat, fortaſſis media diverſæ denſitatis ad lentem objectivam componendam adhibere utile foret, ut à natura factum obſervamus in oculi fabrica, ubi Chriſtallinus humor (fere ejuſdem cum vitro virtutis ad radios lucis refringendos) aqueo & vitreo (aquæ quoad refractionem haud abſimilibus) conjungitur, ad imaginem quam diſtinctè fieri poterit, à natura nihil fruſtra moliente, in

oculi

oculi fundo depingendam: Sed & alii ſunt, in Animalis oculo, prædicti artificii uſus qui non ſunt hujus loci.

FINIS.